

Die Elementaren Teilchen in der Modernen Physik

Von Atomen, Kernen, Quanten, Quarks

Notizen und Stichworte

zu einer Vorlesung für Physikstudierende mittlerer Semester

Jörn Bleck-Neuhaus

Entwurf 10. Juni 2009 21:26

Kapitel 5

(frei zur Nutzung zum Selbststudium,
um kurze Rückmeldung an bleck@physik.uni-bremen.de wird gebeten)

Inhaltsverzeichnis

5 Stoßprozesse quantenmechanisch	5001
5.0 Überblick	5001
5.1 Stoß in der Quantenmechanik	5005
5.2 Quantenmechanische Bewegungsgleichung / Weg zur Bornschen Näherung	5006
5.3 Differentieller Wirkungsquerschnitt	5007
5.4 Coulomb-Streuung in Bornscher Näherung	5008
5.4.1 Berechnung von Streuamplitude und Wirkungsquerschnitt	5008
5.4.2 Wellenmechanische Charakterisierung der Coulomb-Streuung	5010
5.5 Mehrere Streuzentren: Intensitäten addieren oder Amplituden?	5011
5.5.1 Wann muss man die kohärente Überlagerung bilden?	5011
5.5.2 Wann gilt kohärente Summe = inkohärente Summe ?	5011
5.5.3 Wann verschwindet der Interferenzterm?	5012
5.5.4 Wann sind die Phasen der einzelnen Streuwellen gleichmäßig verteilt?	5012
5.5.5 Zwischenergebnis: Rutherford-Modell bestätigt	5014
5.6 Hofstadter-Streuung: Massen- und Ladungsverteilung im Kern	5014
5.6.1 Coulomb-Streuung an ausgedehnter Ladungsverteilung	5014
5.6.2 Die Form der Kerne	5017
5.7 Ein quantenmechanischer Effekt:	
Kohärente Überlagerung der Streuamplituden von Projektil und Target	5021
5.7.1 Abweichungen von der Rutherford-Formel bei Streuung identischer Teilchen	5021
5.7.2 Interferenz von Projektil und Target	5022
5.7.3 Destruktive Interferenz bei Fermionen	5025
Literaturverzeichnis	5029
Index	5030
1	

¹(Für die weitere Bearbeitung: Die Seitenzahlen sollen die Kapitelnummer erkennen lassen. Doppelte Klammern oder Fragezeichen markieren unfertige Stellen.)

5 Stoßprozesse quantenmechanisch

5.0 Überblick

Dass die Atomhülle zu Beginn des 20. Jahrhunderts wesentlich leichter experimentell untersucht werden konnten als ihr Kern, liegt auf der Hand. Zu ihrer Anregung (typischerweise einige eV) genügt schon thermische Energie aus Verbrennung oder elektrische Energie aus chemischen Batterien, denn diese entspringen ja selber den Reaktionen der Atomhülle. Zur Anregung der Kerne hingegen werden Energien von MeV gebraucht, und die standen außer bei den radioaktiven Strahlen, die ganz entsprechend von den Kernen selber erzeugt werden, erst nach der Entwicklung von Teilchen-Beschleunigern ab den 1930er Jahren zur Verfügung. Daher ist es auch wenig überraschend, dass es die Elektronen der Atomhüllen waren, bei denen die Bahn brechende Theorie der Modernen Physik entdeckt wurde. Die beiden 1925/26 von Werner Heisenberg und Erwin Schrödinger unabhängig erarbeiteten Ansätze der selben Quantenmechanik¹ gehören zu den größten Funden in der Entwicklung der Naturwissenschaft. Eine überwältigende Fülle von vorher disparaten oder sogar widersprüchlichen Beobachtungen an Atomen, Molekülen und Festkörpern fügte sich in das plötzlich aufgetauchte neue Begriffsschema, das mit anschaulichen Vorstellungen der klassischen Mechanik aber rigoros brach.

In dem folgenden Kasten 5.1 wird versucht, diese entscheidende Weichenstellung von der Klassischen zur Quanten-Mechanik an den Begriffen *Zustand* und *Quantisierung* in gedrängter Form deutlich zu machen.

¹“Über quantentheoretische Umdeutung kinematischer und mechanischer Beziehungen” (Heisenberg [2]), “Quantisierung als Eigenwertproblem” (Schrödinger [9]).

Kasten 5.1: Zustand und Quantisierung

Die Weichenstellung von der Klassischen zur Quanten-Mechanik

Der **Zustand** eines Massenpunkts (zu einem gegebenen Zeitpunkt) ist definiert:

- Klassisch durch *Orts-* und *Impulsvektor* (\vec{r} , \vec{p}). Beide sind wohlbestimmt und repräsentieren zusammen einen Punkt in einem 6-dimensionalen Zustands- (oder Phasen-)Raum. Alle am Teilchen beobachtbaren Messwerte (Ort, Impuls, Drehimpuls, Energie ...) sind eindeutig bestimmte Funktionen dieser sechs Koordinaten.
- Quantenmechanisch durch eine räumliche *Funktion*, die *komplexe* Amplitude einer im Vakuum existierenden *Materie-Welle* (oder *de Broglie-Welle*). Mögliche Messergebnisse (Ort, Impuls, Drehimpuls, Energie ...) ergeben sich aus dieser *Wellen-Funktion* in Form einer *Wahrscheinlichkeitsverteilung*. Nur wenn sie die Breite Null hat, ist das Messergebnis exakt vorhergesagt; andernfalls streuen wiederholte Messungen, auch wenn der Zustand vorher wieder exakt gleich präpariert wurde (und die Streuung durch mögliche Messfehler ausgeschlossen bleibt). Der (theoretische) Mittelwert der Messungen wird durch den *Erwartungswert* dieser Verteilung definiert. Zu seiner Berechnung muss man die Funktion als Faktor immer zweimal einsetzen (je einmal direkt und komplex konjugiert), und die Messgröße in Gestalt eines entsprechend definierten *Operators* (\hat{x} , \hat{p}_x , $\hat{\ell}_x$, \hat{H} ...) dazwischen. Streuen die Messwerte nicht, ist der Mittelwert einer der Eigenwerte des Operators und das Teilchen im dazu gehörigen Eigenzustand.

Folge (völlig unabhängig von der Größe von \hbar):

1. Eine enorme Vermehrung der Erscheinungsformen möglicher Zustände.
2. Eine enorme Vermehrung der Anzahl möglicher Zustände.
3. Die neue Möglichkeit, zwei oder mehr Zustände zu einem neuen zu überlagern (*Superposition*).

Ähnlichkeiten zur klassischen Punktmechanik sind nur für Materiewellen in Form räumlich konzentrierter Pakete zu erwarten, und bei mehreren Teilchen nur dann, wenn jedes sein eigenes Wellenpaket hat und diese sich nicht überlagern.

Die **Quantisierung** wird durch drei Vertauschungsregeln für Orts- und Impuls-Operatoren eingeführt:

$$\hat{p}_x \hat{x} - \hat{x} \hat{p}_x = \frac{\hbar}{i} \quad (\text{analog für } y \text{ und } z).$$

Einige typische Konsequenzen:

- Die Streuung von Orts und Impuls-Messungen befolgen die Unschärferelation $\Delta x \Delta p_x \geq \hbar/2$.
- Die Eigenwerte für den Bahndrehimpuls $\hat{\ell} = \hat{r} \times \hat{p}$ (also $\hat{\ell}_x = \hat{y} \hat{p}_z - \hat{z} \hat{p}_y$ usw.) bekommen die Quantelung in natürlichen Einheiten \hbar .

Folge:

Die Anzahl der linear unabhängigen quantenmechanischen Zustände ist gerade soweit reduziert, als ob jeder klassische Zustand im klassischen Zustandsraum eine Einheitszelle mit dem Volumen $\Delta\Omega = (2\pi\hbar)^3$ besetzt (der Exponent 3 für die drei Raumdimensionen). Der Grenzübergang $\hbar \rightarrow 0$ würde hinsichtlich der Anzahl der Zustände wieder die Verhältnisse der klassischen Punktmechanik herbeiführen, während die oben genannten Folgen Nr. 1 und 3 aber unangetastet bestehen blieben..

Anmerkungen zum Kasten 5.1:

1. Die Menge der komplexen Funktionen $\{\psi(x)\}$ ist von einer prinzipiell höheren Mächtigkeit als die Menge ihrer Argumente $\{x\} = \mathbb{R}^1$. Zu einer Funktion mehrerer Variablen kann man sich bis maximal drei Dimensionen die räumliche Vorstellung einer "Welle" (oder eines "Feldes") $\psi(x, y, z)$ im \mathbb{R}^3 machen. Die Schwierigkeit dies mit der Vorstellung von einem Massenpunkt zu vereinbaren, heißt Welle-Teilchen-Dualismus. Schon für zwei Teilchen aber ist $\psi(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2)$ eine Welle im \mathbb{R}^6 . Das ist nur in den einfachsten "Produkt-Zuständen" $\psi_A(x_1, y_1, z_1) \times \psi_B(x_2, y_2, z_2)$ dasselbe wie zwei (vorstellbare, *verschiedenartige*²) Wellen ψ_A und ψ_B im selben $\mathbb{R}^3 = (x, y, z)$. Alle anderen Zustände heißen *verschränkt*. Sie stehen mit der Vorstellung von (unterscheidbaren) Massenpunkten wohl noch stärker im Widerspruch als schon die Wellen an sich. Dies geht auch im "klassischen Grenzfall $\hbar \rightarrow 0$ " nicht verloren.
2. Wie man die von Planck 1900 entdeckte Quantisierung der Strahlungsenergie in Paketen $\Delta E = \hbar\omega$ über eine endliche "Größe der Einheits-Zelle im Zustandsraum" (Phasenraumzelle) erklärt, kann man sich schnell am (1-dimensionalen) harmonischen Oszillator klarmachen: Ein Massenpunkt m unter der Kraft $F = -kx$ schwingt mit der Kreisfrequenz $\omega = \sqrt{k/m}$. In seinem 2-dimensionalen Phasenraum $\{(x, p)\} = \mathbb{R}^2$ gibt der Ursprung $x=p=0$ den Grundzustand an; alle Zustände bis zur Energie E füllen eine Ellipse $p^2/2m + 1/2kx^2 \leq E$ aus, ihre Fläche ist das entsprechende Phasenraumvolumen $\Omega(E)$. Mit den Halbachsen³ $a = \sqrt{2mE}$, $b = \sqrt{2E/k}$ folgt $\Omega = \pi ab = 2\pi E \sqrt{m/k} = 2\pi E/\omega$. Ω wächst also mit E linear an und erlaubt nach der Quantisierungsregel⁴ einen neuen Zustand nur, wenn E um $\Delta E = \hbar\omega$ erhöht wird.
3. "Die universelle Bedeutung des sog. elementaren Wirkungsquantums" hieß die Veröffentlichung von O. Sackur [8] aus dem Jahr 1913, in der erkannt wurde, dass die klassische statistische Physik eine Formel für die Entropie des 1-atomigen Gases liefern kann, und dass diese quantitativ richtig werden kann, wenn man nur dem (noch beliebigen) Parameter "Größe der Einheits-Zelle im Zustandsraum" einen *bestimmten* endlichen Wert gab. Zur Überraschung der Autoren ergab die Anpassung dieser *Formel von Sackur-Tetrode* an die Messdaten für den 1-atomigen Hg-Dampf, dass – im Rahmen der Messfehler von einigen % – die Phasenraumzelle für Massenpunkte gerade die selbe Größe $(2\pi\hbar)^3$ haben musste, wie sie bisher nach dem Planckschen Gesetz von 1900 nur für elektromagnetische Strahlung gefordert war.

Dass diese *Quantisierung der klassischen Mechanik* durch einen mathematischen Formalismus mit Funktionen, Operatoren und Vertauschungsregeln hervorgebracht werden könnte, wie im Kasten 5.1 angegeben, wurde 1925 unabhängig von Werner Heisenberg (Matrizen-Mechanik [2]) und Erwin Schrödinger (Wellen-Mechanik [10]) entdeckt und war der Anfang der modernen Quanten-Mechanik. Die Brüche mit der normalen Anschauung von Welle einerseits und Materie andererseits waren so gravierend, dass der richtige Gebrauch der neuen mathematischen Konstrukte oft durch die Methode *Versuch und Irrtum* entwickelt werden musste (und dass eigentlich auch heute noch über ihre genaue Bedeutung gestritten wird). So wurde jahrelang bezweifelt, dass diese bei den Atomhüllen so erfolgreiche "Elektronen"-Theorie auch für andere Systeme gelte, zum Beispiel für Stoßprozesse oder für Kerne.

In den folgenden Kapiteln werden Grundlagen der Quantenmechanik für die Atomhülle beim Leser schon vorausgesetzt. Es wird dargestellt, wie diese neuen Konzepte im Bereich der Kerne (und später der Elementarteilchen) auf ihre Gültigkeit und auf ihren Erklärungswert hin geprüft und erforderlichenfalls

²Existieren zwei Wellen (oder Felder) *gleicher* Art ψ_A und ψ_B im selben Raum, gilt das Superpositions-Prinzip. Sie werden immer in *einer* Funktion $\Psi(x, y, z) = \psi_A(x, y, z) + \psi_B(x, y, z)$ zusammengefasst. Wie sollte man anders auch Interferenzphänomene modellieren können. Einmal summiert, kann man die Summe nicht rückwärts in eindeutig bestimmte Summanden zerlegen. Daher kann das aus der Superposition resultierende Ψ nicht dem Fall zweier unterscheidbarer Teilchen A, B in zwei wohldefinierten Zuständen ψ_A, ψ_B entsprechen. Umgekehrt gilt ebenso: Daran, dass zwei Wellen sich durch Superposition zu einer zusammenfassen lassen (deren Amplitude ihre Maxima, Minima und Nulldurchgänge nun an anderen Stellen hat), kann man erkennen, dass es Wellen der gleichen Art sind. Zu einer tief greifenden Konsequenz dieser fast trivialen Tatsache s. S. 15011.

³Man bringe die Ellipsengleichung auf Normalform: $\frac{p^2}{2mE} + \frac{x^2}{2E/k} = 1$.

⁴In 1 Dimension wird für jeden neuen Zustand ein Phasenraumvolumen $(2\pi\hbar)^1$ benötigt.

weiter entwickelt wurden. Dabei sind drei verschiedene Arten von Fragestellungen zu erkennen, an denen sich diese neue Theorie zu beweisen hatte.⁵

- Lassen sich in ihrem Rahmen die schon bekannten und (in gewisser Weise) bereits “erklärten” Phänomene noch richtig wiedergeben?
Beispiele:
 - Die Quantisierung des harmonischen Oszillators (Planck 1900, Heisenberg 1925, s.o.).
 - Das Spektrum des H-Atoms (Bohr 1913, Schrödinger 1926).
 - Die Rutherford-Streuung (Rutherford 1911, ((wer?? 1926)) s. dieses Kapitel).
- Ist sie zu Erweiterungen fähig, um bekannte, aber bisher unverstandene Phänomene aufzunehmen?
Beispiele:
 - Das radioaktive Zerfallsgesetz (s. Kap. 6.1).
 - Der Spin des Elektrons (s. Kap. 7.1.2).
- Halten die neuen Phänomene, die einerseits von ihr zwingend vorhergesagt werden, andererseits aller bisherigen Physik widersprechen, einer experimentellen Überprüfung stand?
Beispiele:
 - Die Folgen der Ununterscheidbarkeit der Teilchen gleicher Sorte (s. dieses Kapitel 5.7).
 - Das Durchdringen von Potentialbarrieren (s. Tunneleffekt in Kap. 6.3.2).
 - Die Existenz von Antiteilchen (s. Kap. 6.4.5 und 10.2.3).
 - Die unbeschränkte Möglichkeit, verschiedene Zustände mit Wahrscheinlichkeitsamplituden zu einem neuen Zustand zu überlagern (bis hin zur Kombination von Teilchen mit Antiteilchen, s. Kap. 12.3.3).

Als erstes behandelt das vorliegende Kapitel, wegen ihrer zentralen Rolle bei der experimentellen Untersuchung (unsichtbar) kleiner Strukturen, die *Streu-* bzw. *Stoß-*Experimente⁶. Eine verbreitete Meinung zur Quantenmechanik lautet, das wichtigste an ihr sei die Möglichkeit, die **stationären Zustände** mit ihren gequantelten Energien ausrechnen zu können. Mindestens genau so wichtig war und ist jedoch, dass mit ihr auch alle möglichen **Prozesse** (Reaktionen, Streuung bzw. Stöße, Emission und Absorption bzw. Erzeugung und Vernichtung) richtig berechnet werden können. So liefert schon die grundlegende *zeitabhängige* Schrödinger-Gleichung für jeden darin eingesetzten Zustand gerade die Geschwindigkeit, mit der er sich *ändert*.

Als Rutherford in den Jahren ab 1909 die Winkelverteilung der gestreuten α -Teilchen analysieren wollte, konnte er noch nicht wissen, wo die Grenze liegt, ab der die klassische Mechanik zu falschen Resultaten führt. Ist der Erfolg seiner klassisch abgeleiteten Formel und damit die Entdeckung des Atomkerns vielleicht nur ein glücklicher Zufall? Jedenfalls ist hier eine neue quantenmechanische Berechnung angebracht. Es zeigt sich:

- Der neue quantenmechanische Formalismus sagt die Rutherford-Formel genauso richtig voraus.
- Er zeigt einen einfachen Weg, die Streuexperimente zu verfeinern und daraus mehr über die räumliche Struktur der Kerne zu lernen.
- Er hat eine theoretische Konsequenz, die nur für mehrere identische Teilchen auftreten soll. Sie widerspricht der klassischen Mechanik so prinzipiell, dass es auch im Grenzfall geringer Geschwindigkeiten und großer Abstände der Teilchen bei deutlich verschiedenen Vorhersagen bleibt. Bei der Streuung von α -Strahlung in Heliumgas (also Stößen von α -Teilchen mit α -Teilchen) wurde diese äußerst befremdliche Vorhersage der Quantenmechanik 1930 durch ein Experiment erstmalig direkt bestätigt.

⁵Es versteht sich, dass die Quantenmechanik diese Tests glänzend bestand.

⁶Der erste und weitgehend eingebürgerte Name *Streuung* stammt vom Wellenbild, der zweite Name *Stoß* vom Teilchenbild, und beide meinen das gleiche.

5.1 Stoß in der Quantenmechanik

Quantenmechanischer Zustand Allgemein ist jeder *Prozess* eine Zustands-*Änderung*. Welche Zustände sind zu betrachten, wenn ein einfliegendes freies Teilchen – das *Projekttil* – durch ein vom *Target* verursachtes Kraftfeld abgelenkt wird?

$$\begin{aligned} \text{Anfangszustand (initial)} & : \text{ freies Teilchen mit Impuls } \vec{p}_{ini} \\ \text{Endzustand (final)} & : \text{ freies Teilchen mit Impuls } \vec{p}_{fin} = \vec{p}_{ini} + \Delta\vec{p} \end{aligned} \quad (5.1)$$

Der Prozess “elastischer Stoß” macht nichts anderes als einen Impulsübertrag $\Delta\vec{p}$.

Quantenmechanisch wird ein freies Teilchen mit bestimmtem Impuls \vec{p} als de Broglie-Welle mit Wellenlänge $\lambda = 2\pi\hbar/p$, konstanter Amplitude A_0 , unendlich ausgedehnt in Zeit und Raum beschrieben:

$$\psi_{\vec{k}}(\vec{r}, t) = A_0 \exp \left[i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) \right] . \quad (5.2)$$

(\vec{k} : Wellenvektor mit $\vec{p} = \hbar\vec{k}$, $k = 2\pi/\lambda$, und $E_{\text{kin}} = \hbar\omega$
erstmals vorgeschlagen von Luis de Broglie 1923, (Nobelpreis 1929))

In diesem Zustand läuft das Teilchen mit konstanter Stromdichte beständig in Richtung \vec{k} ; es ist in einem Eigenzustand zum Impulsoperator $\hat{p} = (\hbar/i)\vec{\nabla}$, damit auch zum Hamilton-Operator der kinetischen Energie (hier zunächst nicht-relativistisch):

$$\hat{H}_0 = \frac{\hat{p}^2}{2m} \quad \hat{H}_0\psi_{\vec{k}} = E_{\text{kin}}\psi_{\vec{k}} . \quad (5.3)$$

Für anschauliche Argumentation oft eher brauchbar als so ein unendliches Wellenfeld ist ein begrenztes *Wellenpaket*, wie man es durch Überlagerung von Funktionen $\psi_{\vec{k}}$ mit etwas abgeänderten Wellenlängen entstehen lassen kann. Solche Wellenpakete, gleich welcher Gestalt, sind räumlich mindestens einige λ ausgedehnt und streng genommen keine Impuls- oder Energie-Eigenzustände. Jedoch sind sie seit den Anfängen der Quantenmechanik und bis heute von größtem Nutzen, wenn man sich den Ablauf von Stoß- oder Reaktionsprozessen vorstellen will, womöglich im Licht klassischer Veranschaulichungen. Z.B. ergibt sich aus der Schrödingergleichung: Wenn ein Wellenpaket kleiner als die wesentlichen Distanzen im betrachteten System ist – das sind z.B. Breiten und Abstände von Potentialtöpfen, Abstände zwischen Teilchen etc. –, dann folgt sein Mittelpunkt \vec{r} in guter Näherung der klassischen Newtonschen Bewegungsgleichung $\vec{F} = m d^2\vec{r}/dt^2$ (*Ehrenfest'sches Theorem*).

Wellenpakete sind ein Standard-Beispiel für die Unbestimmtheitsrelation $\Delta x \Delta p_x \geq \hbar/2$, wobei $\Delta x = \left\langle \sqrt{(x - \langle x \rangle)^2} \right\rangle$ und Δp analog die mathematisch korrekt definierten Standardabweichungen sind (Werner Heisenberg 1927, Nobelpreis 1932).

Klassische Näherung Zur Prüfung der Zulässigkeit einer klassischen Berechnung muss λ also mit den typischen “charakteristischen” Längenparametern des Systems verglichen werden. Bei der normalen Rutherford-Streuung ist das die Länge ρ_0 aus Gl. (3.3), der bei gegebener Energie minimal mögliche Abstand zweier Teilchen (im Fall gleichnamiger Ladung).

Frage 5.1 Könnte eine andere Größe mit der Dimension Länge für diesen Test relevant sein? Z.B. der Kernradius R_K ?

Antwort 5.1 Nein, der Kernradius nicht. Denn längs jeder Trajektorie, die außerhalb R_K bleibt (also bei der normalen Rutherford-Streuung), ist das Coulomb-Feld völlig unabhängig von R_K (kugelsymmetrische Ladungsverteilung des Kerns vorausgesetzt). Daher kann R_K in der Formel für den Rutherford-Wirkungsquerschnitt nicht auftauchen und scheidet damit als Kandidat für einen Vergleichsmaßstab aus.

Die Abschätzung der Wellenlänge λ für α -Teilchen von 5 MeV ist einfach (wenn man die Masse in Energie ausdrückt und $\hbar c = 200 \text{ MeV fm}$ sowie $E_{\text{kin}} = p^2/2m$ benutzt):

$$\frac{\lambda}{2\pi} = \frac{\hbar}{p} = \frac{\hbar c}{pc} \approx \frac{200 \text{ MeV fm}}{\sqrt{2m_\alpha c^2 E_{\text{kin}}}} = \frac{200 \text{ MeV fm}}{\sqrt{2 \times 4000 \text{ MeV} \times 5 \text{ MeV}}} = 1 \text{ fm} . \quad (5.4)$$

Das ist beim Rutherford-Experiment klein gegen den kleinstmöglichen Abstand zum Streuzentrum $\rho_0 = 40 \text{ fm}$ (s. Kap. 3.2.2). Daher kommt das richtige Ergebnis der Berechnung nach der klassischen Mechanik nicht unerwartet. Aber wo bringt die Quantenmechanik etwas neues?

5.2 Quantenmechanische Bewegungsgleichung / Weg zur Bornschen Näherung

Streuwelle. Schon die grundlegende zeitabhängige Gleichung von Erwin Schrödinger [10] (1925, Nobelpreis 1933)

$$\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial t} \psi = \hat{H} \psi \quad (5.5)$$

sagt, wenn man hinter dem Hamilton-Operator \hat{H} einen *beliebigen* Zustandsvektor (oder Wellenfunktion) ψ einsetzt, dessen künftige Entwicklung voraus. In linearer (oder 1.) Näherung z.B. so:

$$\psi(t + \Delta t) = \psi(t) + \Delta \psi \approx \psi(t) + \Delta t \frac{\partial \psi}{\partial t} = \psi(t) + \Delta t \frac{i}{\hbar} \hat{H} \psi(t) . \quad (5.6)$$

Dass gerade die Eigenzustände mit $\hat{H} \psi = E \psi$ die einzigen stationären Zustände sind (weil dann der Zuwachs $\Delta \psi$ zur bestehenden Wellenfunktion ψ proportional ist, also zum Zustandsvektor “parallel”), ergibt sich ja erst daraus⁷.

Frage 5.2 *Ein Schein-Problem der linearen Näherung: Der Zuwachs $\Delta \psi$ ist zum Vektor des Eigenzustands ψ parallel und wächst linear mit Δt . Warum wächst die Norm $\langle \psi(t) | \psi(t) \rangle$ nicht auch linear (wie $(1 + \Delta x)^2 \approx 1 + 2\Delta x$) ?*

Antwort 5.2 *Weil mit komplexen Zahlen $|1 + i\Delta x|^2 = 1 + (\Delta x)^2$. Im Detail:*

$$\begin{aligned} \psi(t + \Delta t) &\approx \psi(t) + \Delta t \frac{i}{\hbar} E \psi(t) = (1 + \Delta t \frac{i}{\hbar} E) \times \psi(t) \\ \langle \psi(t + \Delta t) | \psi(t + \Delta t) \rangle &\approx |1 + \Delta t \frac{i}{\hbar} E|^2 \times \langle \psi(t) | \psi(t) \rangle \\ &= [1 + (\Delta t E / \hbar)^2] \times \langle \psi(t) | \psi(t) \rangle \\ &\approx (\text{Term mit } \Delta t^2 \text{ gegenüber } 1 \text{ vernachlässigen:}) \langle \psi(t) | \psi(t) \rangle . \end{aligned}$$

Für den Stoßprozess heißt das: Solange sich ein Wellenpaket $\psi(\vec{r})$ außerhalb der Reichweite der Wechselwirkung mit dem Streuzentrum befindet – also “vor” und “nach” dem Stoß – verhält es sich so, als ob \hat{H}_0 (Gl. 5.3) der korrekte Hamiltonoperator wäre. Das Paket fliegt (wenn es z.B. gaußförmig war: allmählich breiter werdend) geradeaus weiter. Sobald sich das Potential $V(\vec{r})$ “bemerkenbar macht” (d.h. wenn irgendwo $V(\vec{r}) \psi(\vec{r}) \neq 0$ ist), entstehen zusätzlich an diesen Orten “Streuwellen”, die in alle Richtungen kugelförmig auseinander laufen – wie auf jeder Wasserfläche, wo man zusehen kann, wie eine Wellengruppe (z.B. einige durch einen Steinwurf einmal erzeugte Ringe) an einem Stock eine kreisförmige “Streuwelle” erzeugt. Auf die ebene Welle wirkt das Potential wie eine Störung, weshalb \hat{H}_0 der “ungestörte Hamilton-Operator” genannt wird, \hat{V} der “Störoperator” und $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{V}$ der “wahre” oder “vollständige” Hamilton-Operator. Die genauere mathematische Behandlung mit Hilfe von Wellenpaketen ist nun aber derart kompliziert,

⁷Eine Anmerkung für später (Kap. 7.1.1): In zusammengefasster Form $\psi(t + \Delta t) \approx (1 + \Delta t \frac{i}{\hbar} \hat{H}) \psi(t)$ zeigt die Gleichung, dass der Operator $(1 + \Delta t \frac{i}{\hbar} \hat{H})$ den Zustand um Δt in der Zeit versetzt. Es ist der (infinitesimale) Zeitenwicklungs-Operator. Genauso bewirkt der Impulsoperator \hat{p} in $(1 + \frac{i}{\hbar} \Delta \vec{r} \cdot \hat{p})$ eine infinitesimale Translation um $\Delta \vec{r}$, und der Drehimpulsoperator $\hbar \hat{\ell}_z$ in $(1 + i \Delta \phi \cdot \hat{\ell}_z)$ eine infinitesimale Drehung um den azimuthalen Winkel $\Delta \phi$.

dass die Behandlung mit unendlich ausgedehnten ebenen Wellen $\psi_{\vec{k}}$ vorzuziehen ist, obwohl auch sie ihre mathematischen Schwierigkeiten hat.

Im Fall des Streuprozesses beginnen wir mit der ebenen Welle für das einlaufende Teilchen $\psi_{\vec{k}_{ini}}$. Da dies ein Eigenzustand zu \hat{H}_0 ist, nicht zu $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{V}$, wird er durch die zusätzliche Existenz des Potential-Operators \hat{V} verformt wie in Gl. (5.6) angegeben. Im Zuwachs $\Delta\psi$ entsteht ständig eine zusätzliche

$$\text{Streuwellen} \quad \frac{i}{\hbar} \hat{V} \psi_{\vec{k}_{ini}} \quad \left[\equiv \frac{i}{\hbar} V(\vec{r}) \psi_{\vec{k}_{ini}}(\vec{r}) \right] \quad (\text{pro Zeiteinheit}). \quad (5.7)$$

Winkelverteilung. Diese kontinuierlich entstehende Streuwelle kann man sich wieder als Überlagerung von vielen ebenen Wellen $\psi_{\vec{k}}$ mit verschiedenen Richtungen von \vec{k} schreiben, also in Fourier-Zerlegung. Mit welcher Amplitude ein bestimmtes $\psi_{\vec{k}_{fin}}$ darin vorkommt, kann dann durch das Skalarprodukt von diesem $\psi_{\vec{k}_{fin}}$ mit der Streuwelle angegeben werden:

$$\langle \psi_{\vec{k}_{fin}}(\vec{r}) | V(\vec{r}) | \psi_{\vec{k}_{ini}}(\vec{r}) \rangle = \int \psi_{\vec{k}_{fin}}^*(\vec{r}) V(\vec{r}) \psi_{\vec{k}_{ini}}(\vec{r}) d^3r. \quad (5.8)$$

Dieser Ausdruck heißt auch *Matrixelement des Potentials*. Sein Absolut-Quadrat gibt schon die Intensität an, mit der diese Komponente $\psi_{\vec{k}_{fin}}$ der Streuwelle erzeugt worden ist, also die Wahrscheinlichkeit, dass das gestreute Teilchen im entsprechend abgelenkten Zustand zu finden ist. Das Matrixelement bestimmt damit (mit weiteren Faktoren, s. Gl. 5.9) direkt die am Detektor gemessene Zählrate.

Dies Verfahren, den Streuprozess eines Teilchens für die quantenmechanische Berechnung aufzubereiten, heißt “Bornsche Näherung” (Max Born 1927, Nobelpreis 1954). Berechnet wird hier der gesuchte Effekt – die *Störung* der ebenen Welle durch das Potential – mit Hilfe einer uns schon bekannten Näherung: Es werden dazu die *ungestörten* Zustände angesetzt⁸. Das mag fast unlogisch erscheinen, ist als “Störungsrechnung in 1. Ordnung” aber ein mathematisch abgesichertes und weit verbreitetes Verfahren.

Für eine genauere Berechnung müssten auch Glieder höherer Ordnung berücksichtigt werden, was in der Praxis aber meist unterbleibt. – (*Das Coulomb-Potential kann man sogar auch exakt durchrechnen.*)

5.3 Differentieller Wirkungsquerschnitt

Bornsche Näherung. Im Trajektorienbild (Kap. 3.2.3) zählt der Detektor die Teilchen, deren Trajektorien nach dem Stoß in seine Richtung zeigen. Im Wellenbild muss man sagen: Der in Richtung \vec{k}_{fin} aufgestellte Detektor liefert mit seiner Zählrate das Messergebnis für die Aufenthaltswahrscheinlichkeit des Zustands $\psi_{\vec{k}_{fin}}$ in der Streuwelle. Dies ist in Bornscher Näherung das Quadrat des Matrix-Elements des Potentials zwischen Anfangs- und Endzustand (wobei das Wort “Endzustand” leicht missverstanden wird, als ob der Detektor dem Teilchen vorschreiben könnte, wohin es fliegt: Gemeint ist nur “der für die Zählrate im Detektor maßgebliche Zustand”).

Für den differentiellen Wirkungsquerschnitt, wie er als Messgröße in Kap. 3.2.3 definiert wurde, folgt dann⁹

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f|^2 \quad (5.9)$$

$$\text{mit der Streuamplitude} \quad f(\vec{k}_{fin}, \vec{k}_{ini}) = \frac{m}{2\pi\hbar^2} \langle \psi_{\vec{k}_{fin}}(\vec{r}) | V(\vec{r}) | \psi_{\vec{k}_{ini}}(\vec{r}) \rangle.$$

(dies wird später als Beispiel von Fermis “Goldener Regel” erkannt - s. Gl. 6.10 in Kap. 6.1.2)

⁸Vgl. die Bemerkung zur Impuls-Näherung bei der Bohrschen Theorie des Bremsvermögens (Kap. 2.2.2, Kasten S. 2011)

⁹Die genaue Rechnung ist in [5, Kap. 4.2 und 4.6] zu finden.

Obwohl in beiden Fällen dieselbe Messgröße, hat der Wirkungsquerschnitt in der Wellenmechanik doch eine etwas andere Deutung als in der Punktmechanik:

- Für Massenpunkte mit definierten Trajektorien hatte $\Delta\sigma = (d\sigma/d\Omega) \Delta\Omega$ eine klare geometrische Botschaft. Es ist nach *Lage*, *Form* und *Größe* diejenige Treffer-Fläche, in die die Trajektorien vor der Streuung hineinzielen müssen, um nach der Streuung im Winkelbereich $\Delta\Omega$ zu enden.
- Im Wellenbild fällt aber eine ausgedehnte ebene Wellenfront mit überall gleicher Intensität auf die ganze Targetfläche ein. Hier gibt $\Delta\sigma = (d\sigma/d\Omega) \Delta\Omega$ die Größe derjenigen Fläche an (immer pro Streuzentrum), durch die genau so viel Intensität hereinkommt, wie nach der Streuung in Richtung auf den Detektor $\Delta\Omega$ weiter fliegt. Ein Bild davon, wie diese Treffer-Fläche geformt ist und ob sie näher oder weiter vom Streuzentrum entfernt liegt, kann man sich nicht mehr machen. Nur ihre Größe ist noch wohldefiniert.

Einsetzen von $\psi_{\vec{k}_{fin}}$ und $\psi_{\vec{k}_{ini}}$ in die Formel (5.9) ergibt, dass in der Streuamplitude f nichts anderes steckt als (bis auf Normierungsfaktoren) die räumliche Fourier-Transformierte von $V(\vec{r})$:

$$\langle \psi_{\vec{k}_{fin}}(\vec{r}) | V(\vec{r}) | \psi_{\vec{k}_{ini}}(\vec{r}) \rangle = \int e^{i\vec{k}_{fin}\cdot\vec{r}} V(\vec{r}) e^{-i\vec{k}_{ini}\cdot\vec{r}} d^3r = \int e^{i\Delta\vec{k}\cdot\vec{r}} V(\vec{r}) d^3r. \quad (5.10)$$

Die Streuamplitude $f(\vec{k}_{fin}, \vec{k}_{ini})$ hängt demnach nur vom Vektor $\Delta\vec{k} = \vec{k}_{fin} - \vec{k}_{ini}$ ab, ist also auf jeden Fall wieder nur durch den Impulsübertrag $\Delta\vec{p} = \hbar\Delta\vec{k}$ bestimmt, vgl. Definition von “Stoß” am Anfang von Kap. 2.2! Auch der Einfluss der Teilchen-Energie ist dabei schon voll berücksichtigt. Er tritt aber wieder explizit in Erscheinung, wenn man die Intensität in Abhängigkeit vom Streuwinkel θ darstellen will, denn die Umrechnung $\Delta k = |\Delta\vec{k}| = 2k \sin(\theta/2)$ ist über den Impuls $p = \hbar k$ von der Energie abhängig.

Ist das Potential kugelsymmetrisch, d.h. $V(\vec{r}) = V(|\vec{r}|)$, dann hängt f sogar nur von einer einzigen Variablen ab, dem Betrag $\Delta k = |\Delta\vec{k}|$. Die Orientierung der Streuebene um die Achse des einfallenden Strahls, d.h. ob nach “oben” abgelenkt wurde, nach “links”, “rechts” etc., hat dann keinen Einfluss.

In Kugelkoordinaten mit der Einschussrichtung als z -Achse ist θ der *polare Winkel*, während die Orientierung der Streuebene um die z -Achse durch den *Azimat* Φ gegeben ist. Von Φ kann die Streuamplitude demnach nur abhängen, wenn es auch das Potential tut.

5.4 Coulomb-Streuung in Bornscher Näherung

5.4.1 Berechnung von Streuamplitude und Wirkungsquerschnitt

Abgeschirmtes Potential. Da die Streuamplitude $f(\vec{k}_{fin}, \vec{k}_{ini})$ nun nicht von sechs, sondern nur von einer Variablen abhängt, schreiben wir dafür $f(\Delta k)$. Man muss sie zunächst für ein “*abgeschirmtes* Coulomb-Potential” zwischen den Ladungen von Projektil (ze) und Kern (Ze) berechnen:

$$V_{abgeschirmt}(r) = V_{Coulomb}(r) e^{-\frac{r}{a}} = \frac{zZe^2/4\pi\epsilon_0}{r} e^{-\frac{r}{a}}. \quad (5.11)$$

Darin ist a der “Reichweite-Parameter”. ($a \rightarrow \infty$ ergibt das reine Coulomb-Potential.) Dieser exponentielle Abschirmungsfaktor ist zunächst ein notwendiger mathematischer Trick, um das Integral zu *regularisieren*, denn ohne ihn würde das Fourier-Integral nicht konvergieren (s. Kasten 5.2).

Hier ist der Trick aber auch physikalisch gerechtfertigt, denn außerhalb der Hülle ist für das herannahende α -Teilchen das Coulomb-Potential des Kerns ist ja wirklich durch die Elektronen abgeschirmt. Mit Werten um $a \approx$ Atomradius ≈ 0.05 nm kommt die Formel der Realität sehr nahe. Resultat (für die genaue Rechnung mit allen Faktoren s. z.B. [5, Kap. 4.6]):

$$f_a(\Delta k) = \frac{2m}{\hbar^2} z Z (e^2/4\pi\epsilon_0) \frac{1}{\Delta k^2 + 1/a^2} = 2m z Z (e^2/4\pi\epsilon_0) \frac{1}{\Delta p^2 + \hbar^2/a^2}. \quad (5.13)$$

Kasten 5.2: Fourier-Transformation des abgeschirmten Coulomb-Potentials

Das gesuchte Integral^{*)}

$$F(k) = \int e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \frac{e^{-\kappa r}}{r} d^3r \quad (5.12)$$

wird zur Auswertung in einem Koordinatensystem mit der z -Achse parallel zu \vec{k} betrachtet und in Polarkoordinaten geschrieben.

$$\vec{k} \cdot \vec{r} = k r \cos \vartheta ; \quad d^3r = r^2 dr d\varphi d(\cos \vartheta) : \quad F(k) = \iiint e^{i k r \cos \vartheta} \frac{e^{-\kappa r}}{r} r^2 dr d\varphi d(\cos \vartheta)$$

Mit $\cos \vartheta = u$:

$$F(k) = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\infty dr \left(\int_{-1}^{+1} e^{i k r u} du \right) r e^{-\kappa r} = 2\pi \int_0^\infty \left(\frac{e^{i k r}}{i k r} - \frac{e^{-i k r}}{i k r} \right) r e^{-\kappa r} dr$$

$$F(k) = \frac{2\pi}{i k} \int_0^\infty \left(e^{(i k - \kappa)r} - e^{(-i k - \kappa)r} \right) dr = \frac{2\pi}{i k} \left(\frac{1}{i k - \kappa} - \frac{1}{-i k - \kappa} \right) **$$

$$F(k) = \frac{4\pi}{k^2 + \kappa^2}$$

Die Rechnung wird hier in einem eigenen Kasten vorgestellt, weil dies Integral für die Quantenmechanik sehr wichtig ist – z.B. für den Feynman-Propagator (Kap. 9.7), das Yukawa-Potential (Kap. 11.1).

^{*)}Der in der Mathematik für die Fourier-Transformation übliche Normierungsfaktor $(2\pi)^{-3/2}$ ist fortgelassen.

^{**)}Ohne die Bedingung $\kappa > 0$ wäre die Stammfunktion $\frac{e^{(i k - \kappa)r}}{i k - \kappa}$ an der oberen Grenze unbestimmt.

Unabgeschirmtes Potential. Nun kann a doch noch unschädlich unendlich groß gemacht werden. Es bleibt:

$$f(\Delta k) = 2m z Z (e^2/4\pi\epsilon_0) \frac{1}{\Delta p^2}. \quad (5.14)$$

Dabei verschwindet außer dem Hilfsparameter a auch die Naturkonstante \hbar aus der Gleichung – nachträglich ein Glücksfall für Rutherford. Sonst hätte seine klassische Rechnung von 1911 doch fehlgeschlagen müssen, denn erst 1913 zeigte Bohr durch seine Postulate, wie die Konstante \hbar überhaupt in Formeln der Mechanik hineingelangen kann: durch Drehimpulsquantelung. Dieser Glücksfall tritt bei keinem anderen Potential als $V_{Coulomb}$ auf.

Als Ergebnis kommt heraus – die klassische Rutherford-Formel (vgl. Gl. 3.17):

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f|^2 = (2m z Z e^2/4\pi\epsilon_0)^2 \frac{1}{(\Delta p)^4} \equiv \left(\frac{\rho_0}{4}\right)^2 \frac{1}{\sin^4(\theta/2)}. \quad (5.15)$$

Eine perfekte Übereinstimmung zwischen Quantenmechanik und klassischer Rechnung.

Bis hierher gilt die Übereinstimmung allerdings nur in der quantenmechanischen Störungsrechnung 1. Ordnung. Den Wirkungsquerschnitt im Coulomb-Feld kann man auch exakt ausrechnen (s. [6, Ch. XI §7]). Diese exakte Streuamplitude f_{Coul} unterscheidet sich von f in Gl. 5.14 und 5.15, aber der Unterschied besteht nur in einer komplexen *Coulomb-Phase* $\exp(i\varphi)$ (die auch von θ abhängig ist). Das Absolutquadrat und damit der Wirkungsquerschnitt bleibt dasselbe. Daher gilt auch in Strenge in der Quantenmechanik die Rutherford-Formel (wenn die Kerne denn wirkliche Punktladungen wären). Ist diese Coulomb-Phase beobachtbar? Sie könnte sich durch Interferenzerscheinungen nur bemerkbar machen, wenn es um die kohärente Überlagerung von Coulomb-Streuwellen zu *verschiedenen* Streuwinkeln θ geht. In Kap. 5.7 wird beschrieben, in welchem Fall dies nach der Quantenmechanik tatsächlich vorkommen muss.

5.4.2 Wellenmechanische Charakterisierung der Coulomb-Streuung

Stoß und Streuung. *Eine Erinnerung an Kap. 3.2.2.* In der Punktmechanik haben die Projektile individuelle Trajektorien. Je nach ihrem Stoßparameter b erhalten sie einen bestimmten Impuls $\Delta\vec{p}$ übertragen, der wegen $\Delta p = 2p \sin(\theta/2)$ einem bestimmten Ablenkwinkel θ entspricht (s. Abbildung 3.7). Die Coulomb-Streuung ist dann charakterisiert durch eine bestimmte Funktion $b(\theta) = \frac{1}{2} \rho_0 \cot(\theta/2)$. Der Rutherford-Wirkungsquerschnitt ergibt sich durch die statistische Mittelung über viele Trajektorien, die gleichmäßig dicht auf die Targetfläche einfallen, d.h. verschiedene Stoßparameter haben. So wird z.B. Rückwärtsstreuung deswegen nur selten vorkommen, weil sie extrem kleine Stoßparameter b braucht und die entsprechend kleinen Bereiche “schwer zu treffen” sind, während große b und damit kleine Ablenkwinkel häufiger getroffen werden¹⁰.

Im Wellenbild gibt es zur Beschreibung der Zustände statt Trajektorien die Wellenvektoren \vec{k} . Auf eine ausgedehnte ebene Welle *überträgt* ein reines Coulomb-Potential nicht einen bestimmten Impuls $\Delta\vec{p}$, sondern alle möglichen verschiedenen Werte und Richtungen $\Delta\vec{p}$ gleichzeitig, gewichtet jeweils mit dem Gewichtungsfaktor $\propto 1/\Delta p^4$ (Gl. 5.15)¹¹. Wegen dieses Faktors sind kleine Δp bevorzugt (sogar bis hin zu einer mathematischen Singularität in Vorwärtsrichtung, $\Delta p \rightarrow 0$).

Auflösungsgrenze. Ein *abgeschirmtes* Coulomb-Potential – mit der Abschirmlänge a , die wir als ein Maß für die räumliche Struktur des Streuzentrums ansehen können – überträgt den Impuls Δp mit einem modifizierten Gewichtungsfaktor (s. Gl. 5.13)

$$\frac{1}{(\Delta k^2 + 1/a^2)^2} \propto \frac{1}{(\Delta p^2 + \hbar^2/a^2)^2}.$$

Auch hier kommen die kleinsten Δp , also die kleinsten Ablenkwinkel θ , am häufigsten vor, jedoch ohne Singularität. Der Quotient kann nicht mehr gegen unendlich gehen, sondern wird im Bereich $\Delta p \ll \hbar/a$

¹⁰Vgl. Kap 3.2.3

¹¹So für die Intensität. Für die Amplitude: $\propto 1/\Delta p^2$.

konstant. Dies gibt ein erstes Beispiel, wie aus der von der Rutherford-Formel abweichenden Form der Winkelverteilung auf weitere räumliche Eigenschaften des Streupotentials geschlossen werden kann.

Der Bereich konstanter Winkelverteilung kann sich sogar über den gesamten Bereich von Ablenkwinkeln $0 \leq \theta \leq \pi$ bzw. Impulsüberträgen $0 \leq \Delta p \leq 2p$ ausdehnen, nämlich wenn $2p \ll \hbar/a$ erfüllt ist. Dazu muss nur E_{kin} hinreichend klein sein, so dass die de Broglie-Wellenlänge $\lambda \gg 2\pi a$ ist. Die Streuamplitude hängt dann gar nicht mehr vom Winkel θ ab, d.h. die Streuwelle ist *isotrop* und die Winkelverteilung konstant. Aus ihrer Form kann man dann nichts mehr über die Art oder Größe (\cong Längenparameter a) des Streuzentrums lernen¹² (aus der absoluten Zählrate schon, denn $d\sigma/d\Omega = |f|^2 \propto a^4$). (*Dieses Verhalten wäre aus dem Trajektorienbild der klassischen Mechanik nur sehr schwierig auszurechnen gewesen.*)

Abweichungen vom reinen Coulomb-Potential gibt es nicht nur durch die elektronische Abschirmung (mit $a \approx$ Atomradius). Auch die Kerne selber erzeugen im Bereich $r < R_K$ ein anderes Potential als das einer Punktladung. Wo wird man die entsprechenden Modifikationen der Winkelverteilung am besten beobachten? Einerseits nach der Wellenmechanik bei Projektilen mit kleinen de Broglie-Wellenlängen $\lambda \ll R_K$ (also großer Energie. Dies ist ein allgemeiner Grund für den Bau immer stärkerer Teilchen-Beschleuniger, s. Kap 11.5.), andererseits nach der Punktmechanik bei starker Annäherung, also großem Impulsübertrag, d.h. großem Ablenkwinkel.

(*Übrigens: auch im klassischen Bild zeigte sich die anomale Rutherford-Streuung nur bei hoher Energie und großem Ablenkwinkel – also großem Δp . S. Kap. 3.4 .*)

5.5 Mehrere Streuzentren: Intensitäten addieren oder Amplituden?

Ein bis hier unterschlagenes Problem mit der Streuung im Wellenbild: Wenn n_A einzelne Streuzentren mit der einlaufenden Welle in Wechselwirkung treten, werden auch n_A einzelne Streuwellen ψ_i ($i = 1 \dots n_A$) erzeugt. Sie breiten sich in alle Richtungen aus und überlagern sich miteinander. Für die Feldstärke bzw. Amplitude am Ort des Detektors muss man die einzelnen Wellen aufsummieren, und von dieser Summe das Absolut-Quadrat bilden, um die Messgröße *Intensität* I zu erhalten. Dies ist die *kohärente Überlagerung*. Bei n_A etwa gleich großen Amplituden wäre eine Abhängigkeit $I \propto n_A^2$ zu erwarten.

$I \propto n_A^2$ ist tatsächlich richtig(!), z.B. für die Intensitäts-Maxima bei Lichtbeugung am Doppelspalt/Gitter etc., auch für die Maxima bei Braggscher Beugung von Röntgenstrahlen an Kristalliten¹³.

Andererseits wird in der *Messvorschrift* des differentiellen Wirkungsquerschnitts (also der operationellen und damit *eigentlichen* Definition von $d\sigma/d\Omega$ in Gl. 3.13) die Zählrate nur proportional zur Zahl der Streuzentren angesetzt ($I \propto n_A$), als ob man nicht erst die einzelnen Streuwellen kohärent überlagern, sondern gleich deren Intensitäten einzeln bilden und diese n_A Summanden addieren müsste (Kap. 3.2.3): dies heißt *inkohärente Überlagerung*.

Wie löst sich diese offenbare Inkonsistenz auf?

5.5.1 Wann muss man die kohärente Überlagerung bilden?

Einfache, immer richtige Antwort: *immer*.

Dann anders gefragt:

5.5.2 Wann gilt kohärente Summe = inkohärente Summe ?

In Formeln: wann ist

$$\text{“kohärente Summe”} \left| \sum_{n=1}^{n_A} \psi_n \right|^2 = \text{“inkohärente Summe”} \sum_{n=1}^{n_A} |\psi_n|^2 \quad ?$$

¹²Anmerkung: Ähnlich wird die Auflösungsgrenze beim Mikroskop begründet.

¹³vgl. den Abschnitt zum Compton-Effekt Kap. 6.4.3.

(Setzt man für die Wellen ψ_i die Streuamplituden $f(\Delta k)$ aus Gl. 5.14 ein, gilt die Gleichung nie! Aber $f(\Delta k)$ ist ja auch nur die Amplitude, die vollständige Welle ψ_i hat noch einen Phasenfaktor $e^{i\omega t} e^{-ikr}$. Darin ist der zeitabhängige Faktor für alle Teilwellen der gleiche, kann ausgeklammert werden, der ortsabhängige Faktor aber nicht. Nur dieser ist für die ortsabhängige Intensität zu berücksichtigen.)

Richtig ist immer die mathematische Identität

$$\left| \sum_n \psi_n \right|^2 \equiv \sum_n |\psi_n|^2 + \sum_{\substack{n,m \\ n \neq m}} \psi_n^* \psi_m \quad (5.16)$$

= inkohärente Summe + Interferenzterm

D.h. kohärente und inkohärente Summe sind gleich, wenn hierin der Interferenzterm (die Doppelsumme) verschwindet. Daher die Anschlussfrage:

5.5.3 Wann verschwindet der Interferenzterm?

Wir betrachten die komplexen Phasenfaktoren ($e^{i\varphi_n}$) der einzelnen ψ_n . In jedem einzelnen Summanden der inkohärenten Summe werden sie durchs Betragsquadrat zu 1, ändern die Summe also gar nicht. In jedem Summanden des Interferenzterms kombinieren sie sich aber zum cosinus der relativen Phase $\Delta\varphi_{nm} = \Delta\varphi_m - \Delta\varphi_n$ der beiden Wellen ψ_n und ψ_m :

$$\text{Interferenzterm} = 2 \sum_{n \neq m} |\psi_n| |\psi_m| \cos \Delta\varphi_{nm}$$

Sind die Absolutwerte der Amplituden alle gleich, und kommen alle möglichen cos-Werte zwischen +1 und -1 gleich häufig vor, wird der ganze Interferenzterm Null.¹⁴

Weitreichende Folge. Dieser einfache mathematische Sachverhalt ist entscheidend dafür verantwortlich, dass die anschaulich so gegensätzlichen Konzepte wie Welle und Teilchen doch oft zu denselben Folgerungen führen. Kohärente Überlagerung (d.h. Addition der Amplituden verschiedener Wellen, die am selben Ort eintreffen) und inkohärente Überlagerung (d.h. Addition der Amplituden-Quadrate, sprich der Intensitäten bzw. Teilchenzahlen, die am selben Ort eintreffen) führen immer dann zu den gleichen beobachtbaren Ergebnissen, wenn es viele Wellen mit gleichmäßig verteilten Phasen sind. Doch hat sich unsere an den Gegenständen und Prozessen des Alltags geschulte Anschauung gewöhnlich ein solches Bild von der “Materie” gemacht, dass immer dann besondere Verständnisschwierigkeiten auftreten, wenn sich in den gewohnten makroskopischen Größenordnungen trotzdem Interferenzeigenschaften der Materie zeigen. Man nennt sie oft “makroskopische Quanten-Phänomene”, Beispiele sind die Supraleitung (1911 entdeckt von Heike Kamerlingh Onnes (Nobelpreis 1913), das Bose-Einstein-Kondensat (vohergesagt von Einstein 1926, erst 1995 realisiert durch Eric A. Cornell, Wolfgang Ketterle, Carl E. Wieman (Nobelpreis 2001), der “Atomstrahl-Laser” und der Quanten-Computer. ((Zitate??))

5.5.4 Wann sind die Phasen der einzelnen Streuwellen gleichmäßig verteilt?

Beim Streuexperiment muss die kohärente Addition der Wellen am Ort des Detektors vorgenommen werden, gewöhnlich also in weiter Entfernung: Dort kommen die einzelnen Streuwellen je nach dem genauen Ort ihres Streuzentrums zwar mit näherungsweise gleicher Amplitude, aber sicher mit Gangunterschieden Δs an, also mit verschiedenen Phasenfaktoren. Sind die Gangunterschiede (modulo λ) gleichmäßig über das ganze Intervall $0 \dots \lambda$ verteilt, gilt das gleiche für die Phasen $\Delta\varphi = 2\pi \Delta s / \lambda$ (über das Intervall $0 \dots 2\pi$). Dann verschwindet der Interferenzterm, und übrig bleibt die inkohärente Summe. Genau dies ist bei der

¹⁴Mit der gleichen Begründung addiert man z.B. auch unabhängige Zufallsfehler quadratisch: So entsteht das Fehlerfortpflanzungsgesetz.

Definition der Messvorschrift für den Wirkungsquerschnitt offenbar vorausgesetzt worden.

Interferenzmethoden. *Möglicher Einwand:* Aber die Kerne der Goldatome in der Streufolie im Rutherford-Experiment (Kap. 3.1) sind doch gar nicht statistisch angeordnet, sondern bilden (wie man selbst damals schon vermuten konnte) das periodische Kristallgitter des Festkörpers, mit regelmäßigen Atomabständen von ca. 0.2 nm typischerweise?

Das ist richtig, und wenn eine Strahlung gestreut wird, deren Wellenlänge $\lambda = \hbar/p$ von ähnlicher Größe ist wie die Gitterkonstante, kommen auch nicht alle Gangunterschiede gleich häufig vor, so dass sich tatsächlich starke Interferenzerscheinungen ergeben:

- Beugung von (keV-)Röntgenstrahlung an Festkörpern,
(Max v. Laue 1912, Nobelpreis 1914, u.a. für den Nachweis des Wellencharakters der Röntgenstrahlung)
- Beugung von (100eV-)Elektronen an Festkörpern,
(Clinton Davisson, George P. Thomson, Lester H. Germer 1927, Nobelpreis an Davisson und Thomson 1938, u.a. für den Nachweis des Wellencharakters der Elektronen¹⁵),
- Beugung von (meV-)Neutronen an Festkörpern.
(Clifford G. Shull 1946, Nobelpreis 1994)

Alle drei Beugungsmethoden gehören in der heutigen Festkörper-Physik zu den Standard-Verfahren.

Die Wellenlänge der 5 MeV- α -Teilchen ist (nach Gl. 5.4) nur 1 fm und erzeugt daher ein um 5 bis 6 Größenordnungen feineres Raster als die Gitterkonstante der Kristallstruktur. Bezogen auf 1 fm als die "charakteristische Länge im System" erscheinen die Orte der Kerne im Gitter völlig ungeordnet (z.B. schon wegen der thermischen Schwingungen um ihre Ruhelage): Einwand widerlegt¹⁶.

Nebenbei: selbst die alltägliche Spiegelung von Lichtstrahlen kann man wellentheoretisch sehen. Sie ist dann ein Interferenzphänomen mit ganz einfacher und perfekter Phasenbeziehung, die den Interferenzterm überall außerhalb der Richtung Ausfallswinkel=Einfallswinkel gerade so groß werden lässt, dass er die inkohärente Summe genau auslöscht. Wird die spiegelnde Fläche aber rau (immer gemessen an der Wellenlänge), wird die Phasenbeziehung gestört, der Interferenzterm nimmt ab und aus der echten Reflexion wird die diffuse.¹⁷

Für Rutherfords Deutung der α -Teilchenstreuung war das alles ohne Belang: Er durfte sich 1911 noch auf die Punktmechanik verlassen, die diese Probleme mit Interferenzen nicht kennt.

Welle oder Teilchen: Ist der Unterschied beobachtbar? Diese Überlegungen zum Verschwinden des Interferenzterms sind auch im Hinblick auf den Welle-Teilchen-Dualismus von grundsätzlicher Bedeutung. Dabei ist oft weniger das räumliche als das zeitliche Verhalten der Phasen entscheidend. Denn kleine regellose Unterschiede $\Delta\omega$ in den Frequenzen lassen nach gewisser Zeit t die Interferenzerscheinungen genau so verschwinden wie es regellose räumliche Gangunterschiede tun. Bei dieser zeitlichen *Dekohärenz* ergeben sich die Phasenunterschiede $\Delta\varphi$ aus $\Delta\varphi = \Delta\omega t$, was in der Quantenmechanik (mit $\Delta E = \hbar \Delta\omega$) auch so gelesen werden kann: $\Delta\varphi = \Delta E (t/\hbar) \approx 10^{15} (\Delta E/\text{eV}) (t/\text{s})$. Das heißt praktisch: Um auch nur $t = 1$ s lang eine Phasenbeziehung zwischen zwei Teilsystemen auf etwa $\Delta\varphi=1 \approx 60^\circ$ genau beizubehalten,

¹⁵Da G.P. Thomson der Sohn von J.J.Thomson ist, entstand das Bonmot: "Der Vater bekam den Nobelpreis (1903) für den Beweis, dass das Elektron ein Teilchen ist, der Sohn für den Beweis des Gegenteils".

¹⁶Bei Bestrahlung mit schweren Teilchen passen nur bei extrem niedriger Energie (Bereich meV) die Dimensionen von Wellenlänge und Kristallgitter zusammen, vgl. Beugung von Neutronen am Gitter, von He-Strahlen an Oberflächen (??Zitat).

¹⁷Deshalb z.B. glänzen staubige Flächen nicht mehr so schön, und beim Schuhputzen bemüht sich der Physiker um die Wiederherstellung einfacher Phasenbeziehungen zwischen den Streuwellen. – Ein anderes Alltags-Beispiel bietet das Beschlagen des Spiegels in feuchter Badezimmerluft, wenn die Tröpfchen und ihre Abstände die Größenordnung der Lichtwellenlänge erreichen. Der geschlossene Wasserfilm hingegen, den größere Tropfen beim Hinunterlaufen hinterlassen, erscheint wieder "klar" (eben wie der Wasser-Spiegel), was wieder auf einfache Phasenbeziehungen an einer glatten Fläche schließen lässt.

muss deren Energie im Bereich 10^{-15} eV kontrolliert werden – nahezu(?) unmöglich. Praktisch mitteln sich die Interferenzerscheinungen unbeobachtbar schnell zu Null, weshalb die inkohärente Summe allein schon richtig ist und ein hier eventuell beobachtbarer Unterschied zwischen Welle und Teilchen sich doch in nichts auflöst.

Dass man dennoch mesoskopische oder fast schon makroskopische Quanten-Phänomene (s.o.) bereits beobachten konnte (oder weiter daran arbeitet), hat mit einer Phasenbeziehung zu tun, die durch keine Energieunschärfe gefährdet wird, weil sie in der Natur der Teilchen selber zu liegen scheint. Gemeint ist die Tatsache, dass ein System aus mehreren *identischen* Teilchen sich nur in *verschränkten* Zuständen bewegen kann. Darin überlagern sich mehrere Komponenten, in denen die identischen Teilchen ihre Rolle vertauscht haben, und die Phasenfaktoren dazwischen stehen in Abhängigkeit von dem Spin des Teilchens absolut fest: +1 bei ganzzahligem Spin (Teilchenklasse Boson) oder -1 bei halbzahligem Spin (Teilchenklasse Fermion).¹⁸ Hier muss man immer die kohärente Überlagerung anwenden. (Ein erstes Beispiel hierzu in Kap. 5.7, weiteres in Kap. 9, 10.)

5.5.5 Zwischenergebnis: Rutherford-Modell bestätigt

Es konnte um 1928 festgehalten werden, dass Rutherfords Erklärung für sein bahnbrechendes Experiment die Überprüfung im Licht der Quantenmechanik bestanden hatte. Und vice versa, damals nicht weniger wichtig: dass auch die neue Quantenmechanik die Prüfung am experimentellen Befund des Rutherford-Versuchs bestanden hatte.

Zwei neuartige Ergebnisse aus der quantenmechanischen Beschreibung der Streuung, die nun weit über Rutherfords Erklärung mit der klassischen Mechanik hinaus weisen, werden in den folgenden Abschnitten dargestellt. Es handelt sich um die “Durchleuchtung” der Kerne mit Hilfe hochenergetischer Elektronen und um die Interferenz der Streuamplituden im Stoß zweier identischer Teilchen. Dabei geht es hier immer noch ausschließlich um die *elastische* Streuung, also um relativ einfache Prozesse, denkt man an die ganze Welt der möglichen Reaktionen zwischen Kernen oder anderen Teilchen.¹⁹

5.6 Hofstadter-Streuung: Massen- und Ladungsverteilung im Kern

Auch an einzelnen Kernen kann man bei Streuexperimenten Interferenzerscheinungen erzeugen und mit ihnen ihre innere räumliche Struktur weiter aufklären. Benötigt werden dazu Wellenlängen nicht größer als die Kerne selber, damit deutliche Phasenunterschiede schon zwischen den Streuwellen entstehen, die zwar *am selben Kern* entstanden sind, aber “vorn” bzw. “hinten” oder “oben” bzw. “unten”. Nur so kann die kohärente Amplituden-Summe darauf empfindlich reagieren. (Die Beiträge von verschiedenen Kernen dürfen wieder inkohärent addiert werden, bei so kurzen Wellenlängen erst recht.) Abbildung 5.1 zeigt das Prinzip.

Entsprechende Experimente wurden in den 1950er Jahren gemacht, unter anderem um zu sehen, ob Proton und Neutron punktförmig sind oder nicht. Ergebnis: sie sind es nicht (Robert Hofstadter, Nobelpreis 1961).

5.6.1 Coulomb-Streuung an ausgedehnter Ladungsverteilung

Allgemeine Formel für ausgedehntes Streuzentrum. Zur Berechnung der gesamten Streuamplitude denkt man sich das ausgedehnte Streuzentrum aus vielen infinitesimal kleinen – also effektiv punktförmigen – Streuzentren zusammengesetzt. Jedes lässt, unabhängig von den anderen, an seinem Ort \vec{r} seine Streuwelle mit Amplitude $df_{\vec{r}}(\Delta k)$ entstehen. Dafür können wir die Gl. (5.14) benutzen, die aber für ein punktförmiges Streuzentrum der Stärke $q = Ze$ gilt und daher jetzt $f_{Ze, Punkt}(\Delta k)$ genannt werden soll. Um sie auf die für das infinitesimale Streuzentrum der Größe dV entfallende Ladung dq herunter zu rechnen, muss $f_{Ze, Punkt}(\Delta k)$ mit dq/Ze multipliziert werden. Für dq machen wir den Ansatz $dq = Ze \rho(\vec{r}) dV$. Hiermit

¹⁸Diese kurze Erwähnung der *identischen Teilchen* ist hier ein Vorgriff auf späteres (Kap. 9.3.3, 15.6). Auch Bosonen und Fermionen als grundlegende Teilchenklassen werden später noch genauer behandelt (Kap. 10.2.8, 15.2).

¹⁹S. Kap. 11 zum “Teilchen-Zoo”.

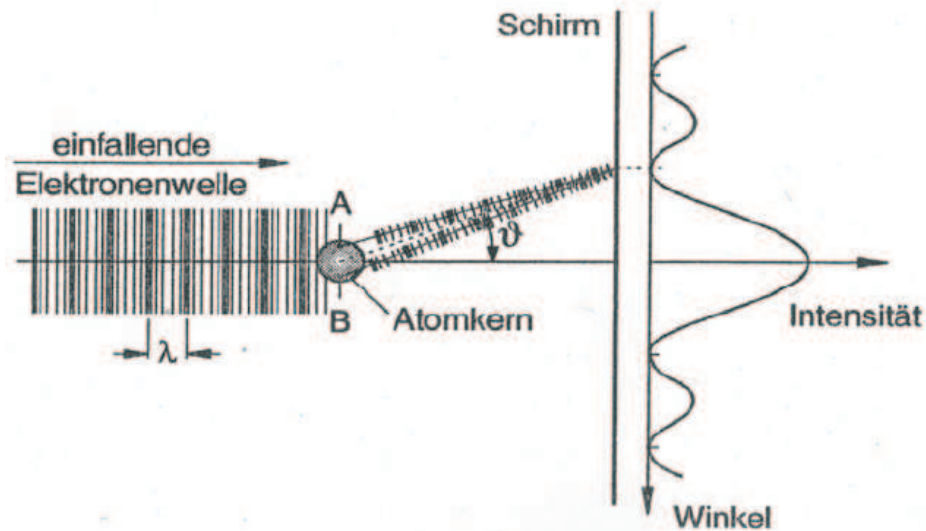


Abbildung 5.1: Zur Entstehung des Phasenunterschieds der an verschiedenen Volumenelementen entstehenden Streuwellen (aus [4])

haben wir die (auf 1 normierte) Form der Ladungsverteilung $\rho(\vec{r})$ eingeführt ($\int \rho(\vec{r}) dV = 1$). Zusammen wird die Streuwelle aus dem Volumen-Element dV :

$$df_{\vec{r}}(\Delta k) = f_{Ze,Punkt}(\Delta k) \rho(\vec{r}) dV . \quad (5.17)$$

Nach dem Superpositionsprinzip aller Wellentheorien darf man diese $df_{\vec{r}}(\Delta k)$ mit den richtigen Phasenfaktoren versehen kohärent addieren (genauer gesagt: integrieren, denn die Verteilung der Quellen ist die kontinuierliche Funktion $\rho(\vec{r})$).

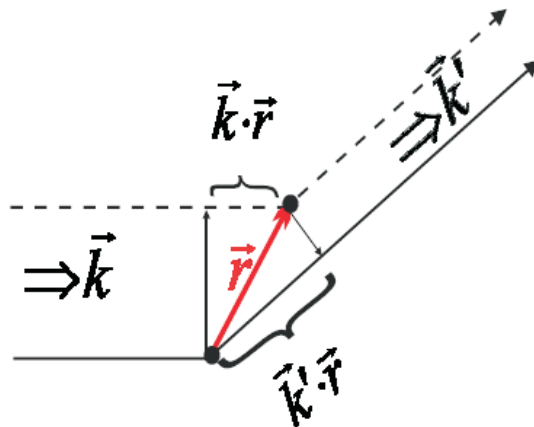


Abbildung 5.2: Zur Berechnung des Phasenunterschieds der an verschiedenen Volumenelementen entstehenden Streuwellen.

Bei der Phase der infinitesimalen Streuwellen $df_{\vec{r}}(\Delta k)$ machen sich nun \vec{r} -abhängige Gangunterschiede bemerkbar (s. durchgezogenen und gestrichelten Pfad in Abb. 5.2): Bezogen auf die Streuung am Ursprung

(durchgezogene Linie), wird das bei \vec{r} liegende Streuzentrum später erreicht (Phasenverzögerung $-\vec{k} \cdot \vec{r}$), der gestreute Strahl hat es dann in der Richtung \vec{k}' aber kürzer zum Detektor (Phasenvorlauf $\vec{k}' \cdot \vec{r}$). Der ganze Phasenunterschied ist also $(\vec{k}' \cdot \vec{r} - \vec{k} \cdot \vec{r}) = \Delta\vec{k} \cdot \vec{r}$, und jede einzelne Streuwelle $f_{\vec{r}}(\Delta\vec{k})$ muss mit dem Phasenfaktor $e^{i\Delta\vec{k} \cdot \vec{r}}$ multipliziert werden.

Die gesamte Streuamplitude eines Kerns ist dann

$$\begin{aligned} f_{Ze,\rho}(\Delta\vec{k}) &= \int e^{i\Delta\vec{k} \cdot \vec{r}} df_{\vec{r}}(\Delta\vec{k}) \\ &= f_{Ze,Punkt}(\Delta\vec{k}) \times \int e^{i\Delta\vec{k} \cdot \vec{r}} \rho(\vec{r}) dV \\ &= f_{Ze,Punkt}(\Delta\vec{k}) \times F(\Delta\vec{k}) \quad . \end{aligned} \quad (5.18)$$

(und der differentielle Wirkungsquerschnitt das Absolutquadrat hiervon).

Formfaktor. Das letzte Integral in Gl. (5.18) heißt Formfaktor $F(\Delta\vec{k})$ der Ladungsverteilung $\rho(\vec{r})$. $F(\Delta\vec{k})$ ist eine von $\Delta\vec{k}$ abhängige Funktion, nämlich die räumliche Fourier-Transformierte der Ladungsverteilung. Der Formfaktor hat seinen Namen daher, dass es den Einfluss der genauen Form des ausgedehnten Streuzentrums auf die messbare Winkelverteilung beschreibt. Für ein "formloses", also wirklich punktförmiges Streuzentrum ist in Gl. (5.18) $\rho(\vec{r}) = \delta(\vec{r})$ (Delta-Funktion) einzusetzen und es kommt $F(\Delta\vec{k}) \equiv 1$ heraus: genau richtig die alte Winkelverteilung. $F(\Delta\vec{k}) \approx 1$ kommt aber auch dann heraus, wenn nur deshalb gar keine nennenswerten Phasenunterschiede der einzelnen Streuwellen entstehen, weil $|\Delta\vec{k} \cdot \vec{r}| \ll 1$ gilt im ganzen interessanten Integrationsgebiet (d.h. wo $\rho(\vec{r}) > 0$). Der Phasenfaktor im Integranden ist dann nahezu konstant $e^{i\Delta\vec{k} \cdot \vec{r}} \approx 1$. Für ein Streuzentrum mit Radius R muss dazu nur die Bedingung $|\Delta\vec{k}| R \ll 1$ erfüllt sein, das heißt: $(\Delta k =) 2k \sin \theta/2 \ll 1/R$. Das gilt bei kleinen Ablenkwinkeln immer, im ganzen Winkelbereich $0 \dots 2\pi$ aber nur bei genügend kleinem Impuls $p = \hbar k \ll \hbar/2R$ (d.h. großer Wellenlänge $\lambda/2\pi \equiv \hbar/p \gg 2R$). Mit Projektilen mit so großen Wellenlängen könnte man an der Form der Winkelverteilung also tatsächlich nie einen Unterschied zwischen punktförmigem und ausgedehntem Streuzentrum sehen.

Auflösungsgrenze. Dies ist die ausführliche und quantitative Weise, die Notwendigkeit kurzer Wellenlängen auszudrücken, wenn hohe räumliche Auflösung gefordert ist – vgl. den Anfang dieses Abschnitts 5.6, aber auch die Bemerkungen mit gleicher Bedeutung zum abgeschirmten Coulomb-Potential in Abschnitt 5.4.2. Dies Verhalten gilt prinzipiell immer, will man räumliche Strukturen mittels Streuung von Wellen auflösen bzw. abbilden²⁰.

Gültigkeitsgrenze. An keiner Stelle wurde die Herleitung der Streuamplitude Gl. (5.18) speziell auf den Atomkern bezogen. Als einzige Voraussetzung ist zu beachten, dass eine mögliche Abschwächung von einlaufender und auslaufender Welle vernachlässigt wurde – auch dies eine Form der 1. störungstheoretischen Näherung (s. Kasten S. 2011 in Kap. 2.2.2). Unter dieser Näherung gilt die Gleichung daher für jede Art von Streuung an räumlich verteilten Streuzentren in beliebiger Anordnung $\rho(\vec{r})$.²¹

Ist diese Anordnung periodisch, wie in den Beispielen für Interferenzmethoden im Abschnitt 5.5.4 oben, oder wie die Striche am optischen Gitter, dann hat die Streuamplitude als Fourier-Transformierte von $\rho(\vec{r})$ scharfe Maxima bei bestimmten Streuvektoren $\Delta\vec{k}$ (die das *reziproke Gitter* bilden), mit der Folge vieler scharfer Interferenzmaxima in regelmäßiger Anordnung.

Fourier-Transformation umkehrbar? Die Fourier-Transformation ist zwar exakt umkehrbar, aber leider kann man dies nicht ausnutzen, um aus einer Messung der Streuwinkelverteilung die gesuchte räumliche Verteilung $\rho(\vec{r})$ direkt zu ermitteln, denn die Messung liefert nur den Absolutbetrag des im allgemeinen komplexen Formfaktors $F(\Delta\vec{k})$. So ist man meist gezwungen, plausible Annahmen über die Gestalt von $\rho(\vec{r})$ zu finden, das damit erwartete Messergebnis zu berechnen²² und dann und nur noch die Details an die

²⁰Weiter kommt man mit *Raster-Methoden*, z.B. in der *Nahfeldmikroskopie* (s. speziellere Literatur).

²¹Sie gilt auch für Beugung am Kristallgitter. Das Wort *Formfaktor* wird hier aber nur auf eine Einheitszelle bezogen und gibt die Fourier-Transformierte der genauen Verteilung der Ladungsdichte darin an, nicht die des ganzen Gitters.

²²Diese Methode heißt *Simulation*.

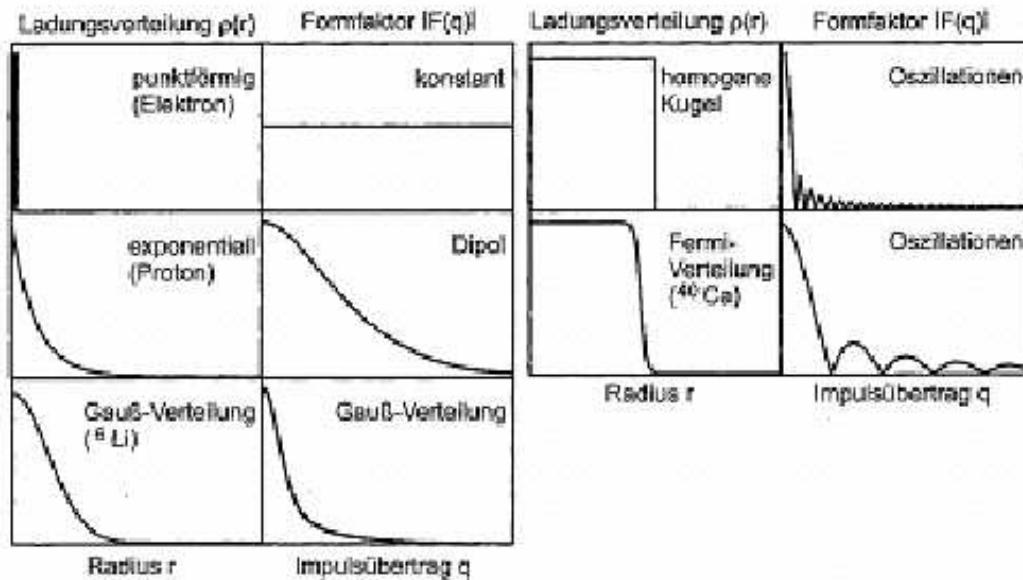


Abbildung 5.3: Typische Entsprechungen von Funktion $\rho(r)$ und ihrer Fourier-Transformierten (Betrag $|F(q)|$) (aus [11], ((?vorläufig?))).

Messung anzupassen. Hilfreich bei der Suche ist eine Gegenüberstellung typischer räumlicher Strukturen und ihrer Formfaktoren wie in Abbildung 5.3.

5.6.2 Die Form der Kerne

Um bei Kernen ($R_K \approx 1..7$ fm) den Formfaktor zu messen, sind Teilchen mit Wellenlängen $\lambda \ll 2\pi R_K \approx 6..40$ fm nötig. Dazu gehören Impulse $p \equiv \hbar 2\pi/\lambda \gg \hbar/R_K$, d.h. $pc \gg \hbar c/R_K = 200 \text{ MeV fm}/R_K \approx 30..200$ MeV. Größere Impulse ergeben dabei mehr Beugungsmaxima.

Für Elektronen mit $m_e c^2 = 511$ keV gilt bei diesen Impulsen ersichtlich schon $pc \gg m_e c^2$, sie sind also hoch relativistisch. Ihre Gesamtenergie nach $E^2 = p^2 c^2 + (m_e c^2)^2$ ist fast vollständig durch pc gegeben, man darf ihre Ruhemasse getrost vergessen.

Allerdings braucht es starke Beschleuniger, um solche Elektronenstrahlen zu erzeugen. Mitte der 1950er Jahre war es an der Stanford-Universität²³ so weit. Am *Stanford Linear Accelerator SLAC*, der Elektronen in einem geraden Strahlrohr durch geeignete Wechselfelder beschleunigt, und der durch Anbau weiterer Beschleunigungsstrecken einfach "wachsen" kann, wurden für viele Kerne die Winkelverteilungen der (elastischen²⁴) Elektronenstreuung gemessen, daraus die Formfaktoren ermittelt und so die Form der elektrischen Ladungsverteilung $\rho(r)$ bestimmt. Für einige besonders schöne (spätere) Beispiele solcher Messkurven siehe Abbildung 5.4 und Abbildung 5.5.

Für $\rho(r)$ ergaben sich dabei Formen wie in Abbildung 5.6. Der so gefundene mittlere Radius folgt wieder der Formel $R_K \approx r_0 A^{1/3}$ (vgl. Gl. 3.20): Eine unabhängige Bestätigung des Bildes vom Kern, wie es aus der anomalen Rutherford-Streuung erschlossen worden war (vgl. Kap. 3.4).

²³nicht weit von der für ihre Ausstrahlung auf die technischen Innovationen der Computerwelt berühmten Gegend Silicon Valley in Kalifornien

²⁴Bei *inelastischen* Stößen – d.h. das Elektron verliert mehr Rückstoßenergie als es an ein ganzes Proton abgeben müsste – und noch 10mal kürzeren Wellenlängen, zu denen der Ende der 1960er Jahre auf 3 km Länge ausgebaute *SLAC* die Elektronen beschleunigen konnte, zeigten sich ganz neue innere Strukturen von Proton und Neutron: die Quarks (vgl. Kap. 13.2.1, tief-inelastische Streuung)

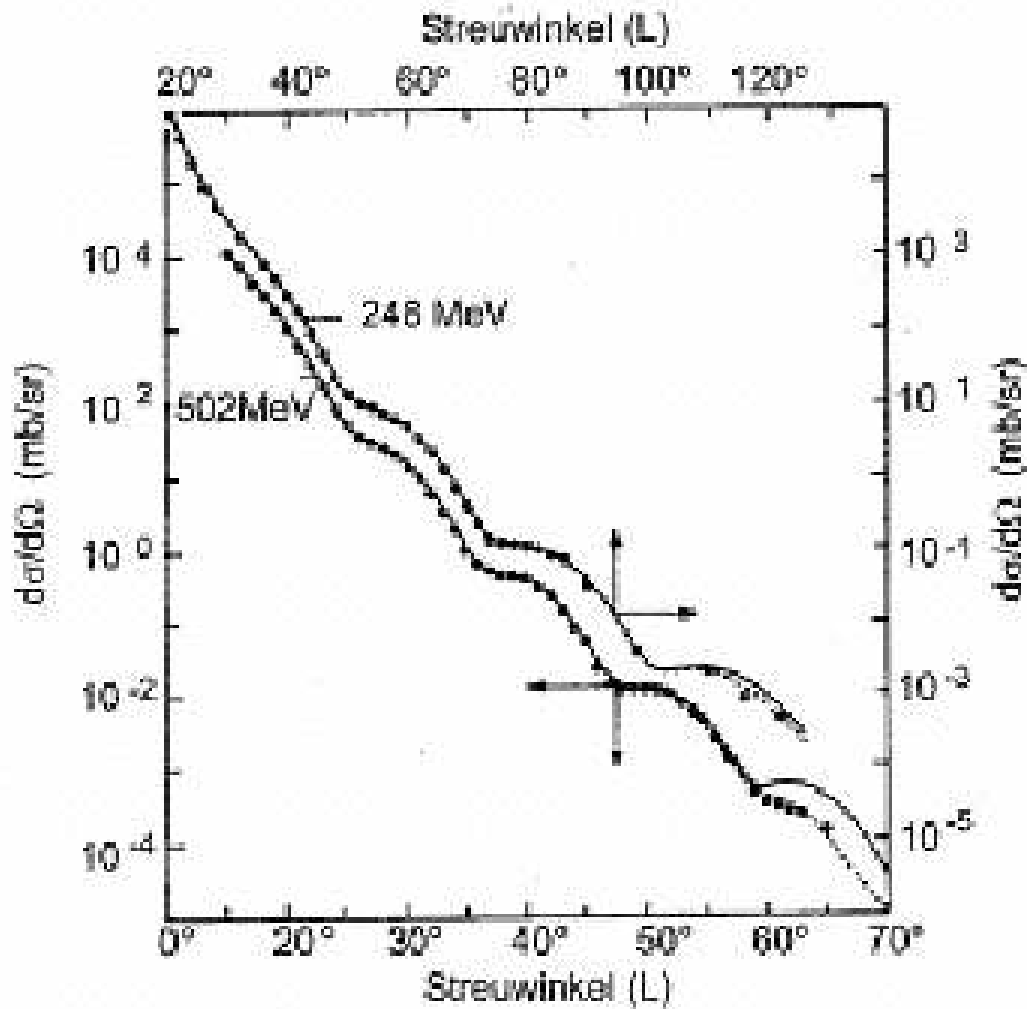


Abbildung 5.4: Winkelverteilung von Elektronen nach elastischer Streuung an Uran-Kernen, bei zwei verschiedenen Energien (aus [11]). Die Beugungsmuster hängen nur von Δk ab. Sie sehen hier gleich aus, trotz verschiedener Energie, weil die Abszisse der oberen Kurve so gestaucht ist, dass Punkte mit gleichem Δk (ungefähr) übereinander liegen (s. obere Skala f. Streuwinkel.)

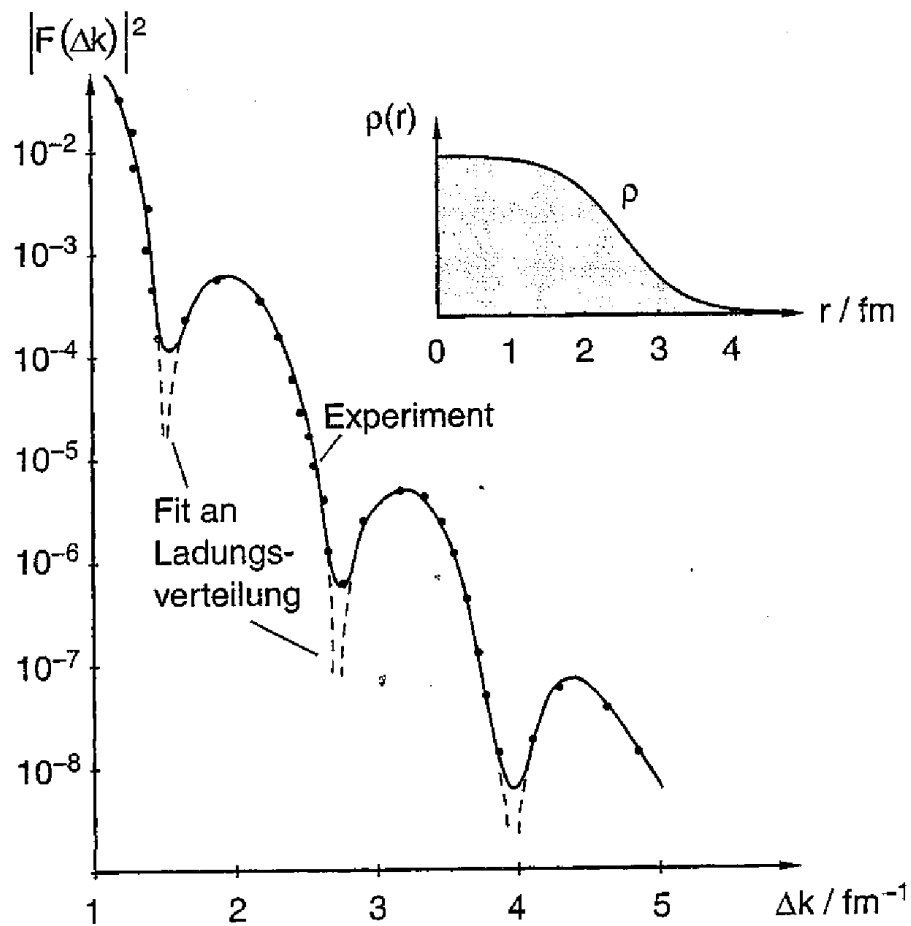


Abbildung 5.5: Das Absolutquadrat des Formfaktors bei elastisch an Sauerstoffkernen gestreuten Elektronen von 750 MeV: besonders schön ausgeprägte Interferenzminima. Kleines Bild: die Form der Ladungsverteilung, aus der nach (Gl. 5.18) die gestrichelte theoretische Kurve berechnet ist (aus [1]).

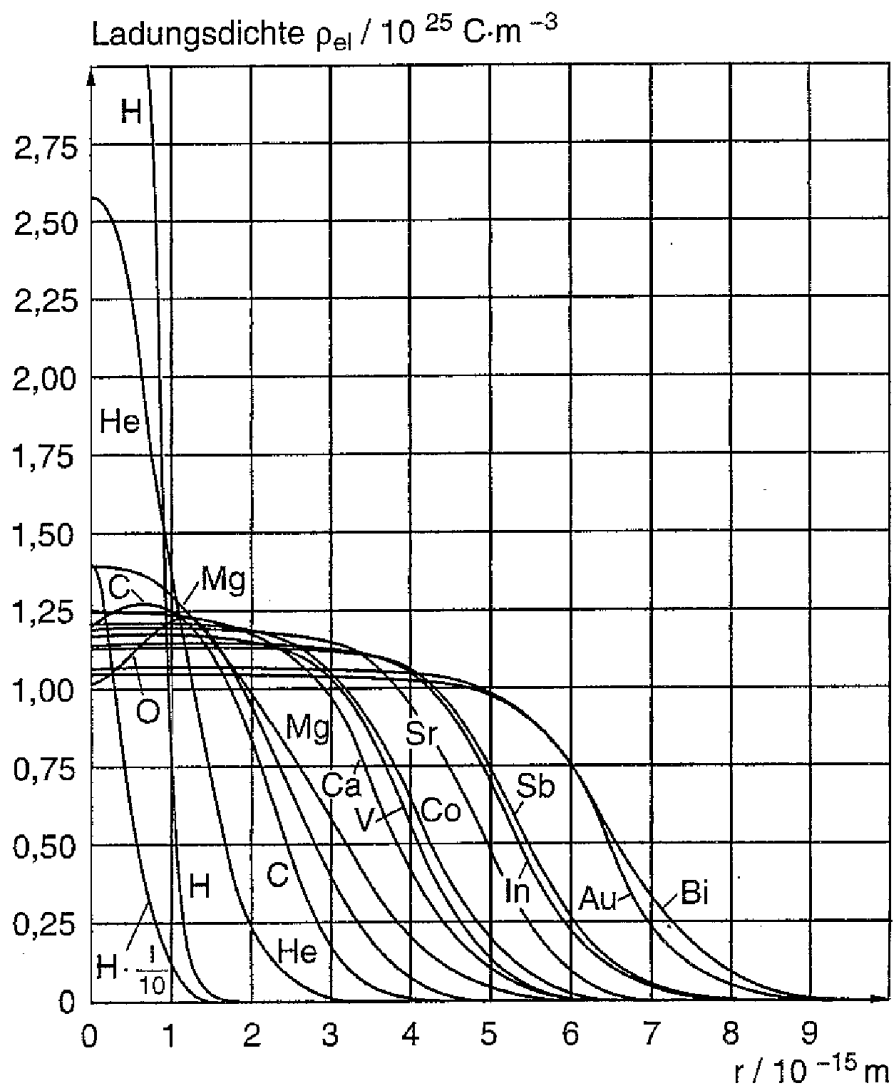


Abbildung 5.6: Die Ladungsdichteverteilung der Kerne ist im Inneren etwa konstant und fällt bei einem Radius, der etwa zu $A^{1/3}$ proportional ist, sanft ab. Ab $A \sim 12$ nimmt der konstante Wert im Inneren mit steigendem A schwach ab. Nur Proton und α -Teilchen haben wesentlich höhere Ladungsdichten. (aus [1])

5.7 Ein quantenmechanischer Effekt: Kohärente Überlagerung der Streuamplituden von Projektil und Target

Die quantenmechanische Theorie der Streuung hält eine Überraschung bereit: Kohärente Überlagerung der Wellenfunktionen von Projektil- und Targetteilchen, wenn beide von der selben Sorte sind.

5.7.1 Abweichungen von der Rutherford-Formel bei Streuung identischer Teilchen

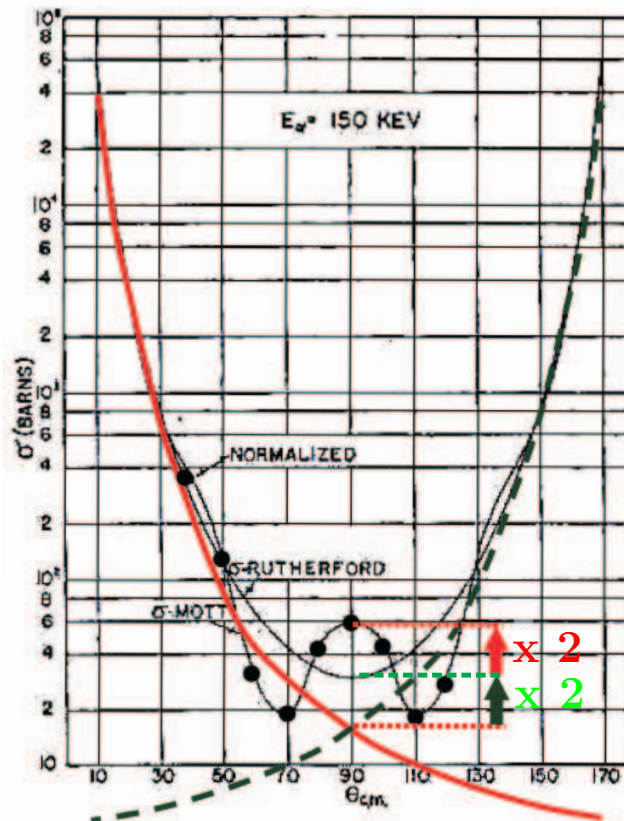


Abbildung 5.7: Winkelverteilung im Schwerpunktsystem bei α - α -Streuung, $E_\alpha = 75$ keV je für Projektil und Target. Punkte: gemessen. Schwarze Kurve “ σ -Mott” : eine richtige theoretische Voraussage (Gl. 5.23). Schwarze Kurve “ σ -Rutherford” : eine falsche theoretische Voraussage (Gl. 5.19 mit 5.20, Summe der einfachen Rutherford-Querschnitte für Projektil (rot) und Target (gestrichelt dunkelgrün)). Bei $\theta = 90^\circ$ unterscheiden sich die beiden Voraussagen vom einfachen Rutherford-Querschnitt um den Faktor 2 bzw. 4. (nach [3])

Einfache Vorhersage. Nach dem Stoß eines α -Teilchens in Helium-Gas hat man immer zwei energiereiche Teilchen, doch kann man weder an den Spuren in der Nebelkammer noch irgendwie anders physikalisch unterscheiden, welches das Projektil und welches der getroffene Targetkern ist. Auch in ihrer kinetischen Energie stimmen beide bei gegebenem Beobachtungswinkel überein, wie man sich z.B. im Schwerpunktsystem sofort klar machen kann, wo die Gleichheit der Energie überhaupt immer gilt. Zählt man die in einem Detektor ankommenden Teilchen (oder die Nebelkammer-Spuren in dem betreffenden Winkelbereich), dann muss man einfach die Summe der Zählraten für “Projektil erreicht Detektor” und “Target-Kern erreicht Detektor” erwarten, also eine Summe vom Typ “inkohärent” (vgl. Kap. 5.5). Ausgedrückt durch den Wirkungsquerschnitt:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{inkohärent}}(\theta) = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)(\text{Projektil} \rightarrow \theta) + \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)(\text{Targetkern} \rightarrow \theta). \quad (5.19)$$

Im Schwerpunktsystem – das wir ab hier voraussetzen – fliegen beide Teilchen immer in entgegengesetzte Richtungen (d.h. θ und $\pi - \theta$), daher:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right) (\text{Target} \rightarrow \theta) = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right) (\text{Projektil} \rightarrow \pi - \theta). \quad (5.20)$$

Die Winkelverteilung der gestoßenen Target-Kerne (gestrichelte dunkelgrüne Kurve in Abbildung 5.7) geht also aus der Winkelverteilung der Projektile (rote Kurve in Abbildung 5.7) durch Spiegelung an $\theta = \pi/2 = 90^\circ$ hervor, und die Summe beider (schwarze Kurve, in der Abbildung “ σ -Rutherford” genannt) ist eine symmetrische Funktion. Wegen der Form des *einfachen* Rutherford-Wirkungsquerschnitts hat diese Summe ein Vorwärts- und ein Rückwärtsmaximum, und in der Mitte ein Minimum. Hier ist $\theta = \pi - \theta$ und daher sind beide Summanden in Gl. (5.19) gleich groß. Bei diesem Winkel kommen zu den abgelenkten Projektilen gerade genau so viel rückgestoßene Target-Teilchen in den Detektor (grüner Pfeil “ $\times 2$ ” in der Abbildung).

Bis hierher kann das wohl nur logisch zwingend scheinen. Es stimmt auch in allen Experimenten, wo im Detektor sowohl abgelenkte Projektile wie rückgestoßene Targetkerne gezählt werden und die folgende Zusatzbedingung erfüllt ist:

Bedingung für inkohärente Überlagerung:

Beim Eintreffen eines Teilchens am Detektor müsste im Prinzip noch festgestellt werden können, ob es sich um das eine oder das andere handelt, gleich ob im aktuellen Experiment diese Unterscheidung gemacht wird oder nicht.

Widerspruch zum Experiment. Doch das Experiment mit α - α -Stößen (schwarze Punkte in Abbildung 5.7) widerspricht dieser einfachen Voraussage. Bei $\theta = \pi/2$ z.B. zeigt die Zählrate in Wirklichkeit ein Maximum. Seine Höhe ist genau das Vierfache des einfachen Rutherford-Wirkungsquerschnitts, nicht nur das Doppelte wie bei der Summe für “Projektil erreicht Detektor” und “Target-Kern erreicht Detektor” (s. roten und grünen Pfeil “ $\times 2$ ”). Daneben liegen Minima, alles zusammen Anzeichen eines Interferenzphänomens.

Die in Abbildung 5.7 gezeigte Messung ist aus dem Jahr 1956 und wurde mit α -Teilchen von 150 keV (im Labor-System) gemacht, doch der erste Nachweis dieses Effekts stammt schon von 1930 (J. Chadwick, Streuung von 1 MeV- α -Teilchen in einer He-gefüllten Nebelkammer). Es ging damals um die erstmalige Überprüfung einer kaum glaublichen Folgerung aus den Regeln der neuen Quantenmechanik: Interferenz von Target und Projektil, wenn beide Teilchen von der gleichen Sorte sind.

Daher die oben genannte Zusatzbedingung mit ihrer etwas umständlichen Formulierung. Nur im Fall identischer Teilchen, die sich *prinzipiell* durch keine physikalische Messung unterscheiden lassen, fordert die Quantenmechanik diesen Zusatz-Effekt, und er ist auch tatsächlich in genau allen diesen Fällen nachgewiesen worden.

5.7.2 Interferenz von Projektil und Target

Eine Vorhersage der Quantenmechanik. So unverständlich diese Abweichung vom erwarteten Ergebnis der klassischen Mechanik oder der 1-Teilchen-Quantenmechanik auch erscheinen mag – sie ist tatsächlich eine einfache Folge der Quantenmechanik mehrerer Teilchen. Heisenberg und Dirac hatten 1926 entdeckt, dass im Fall zweier identischer Teilchen eine Sonderbehandlung nötig ist, die in der klassischen Physik noch nicht einmal formuliert werden kann. Sie besagt, dass die Wellenfunktion bei Vertauschung von zwei identischen Teilchen die gleiche bleiben muss, jedenfalls bis auf ein Vorzeichen.

Grund: Es ist bei der Vertauschung ja *physikalisch* derselbe Zustand herausgekommen. Aus dieser in strenger Allgemeinheit geforderten Symmetrie der Wellenfunktion war 1928 von Robert Oppenheimer und Nevill Mott für Stöße von α -Teilchen an α -Teilchen gefolgert worden, dass sie nicht doppelt sondern 4-mal so häufig den Ablenkwinkel 90° zeigen müssten wie nach der einfachen Rutherford-Formel (oder nach der klassischen Mechanik) bei Stößen verschiedener Teilchen vorhergesagt.

Dabei hängt der Faktor 4 überhaupt nicht von den sonstigen Parametern des Experiments ab. Dies vorhergesagte Verhalten geht also auch dann nicht in den klassischen Grenzfall über, wenn man die dafür sonst ausreichenden Bedingungen wie geringe Geschwindigkeiten/große Abstände etc. einhält. Das machte einmal mehr klar, dass sogar Selbstverständlichkeiten, mögen sie aus makroskopischen Vorstellungen heraus auch logisch zwingend scheinen, für die reale Welt manchmal nicht einmal eine gute Näherung darstellen, und dass man mit der Quantenmechanik einen wahren Glücksgriff getan hatte.

Klassische Mechanik? Ein zentraler Lehrsatz der klassischen Mechanik muss hier außer Kraft gesetzt worden sein. Er lautet:

Ein Zwei-Teilchen-System

[gegeben durch Massen m_1, m_2 , Koordinaten \vec{r}_1, \vec{r}_2 , nur innere Kraft $\vec{F}(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)$, *actio=reactio*]

ist nach Abtrennung der Schwerpunktbewegung exakt äquivalent zu einem 1-Teilchen-System

[gegeben durch **ein** Teilchen mit der reduzierten Masse $m_{red} = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$, der Koordinate $\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$, mit der Bewegungsgleichung $\vec{F}(\vec{r}) = m_{red} \ddot{\vec{r}}$.]

in einem nun am Ursprung feststehenden Kraftfeld $\vec{F}(\vec{r})$.

Frage 5.3 Wie leitet man diesen Satz her?

Antwort 5.3 Die Newtonschen Bewegungsgleichungen beider Teilchen durch die jeweilige Masse teilen und voneinander subtrahieren. Übrig bleibt genau die Bewegungsgleichung des äquivalenten 1-Körper-Problems²⁵.

Das Rezept für identische Bosonen. Wie erklärt nun die Quantenmechanik dies Rätsel? Vor der eigentlichen Erklärung²⁶ benennen wir hier zunächst ein Rezept, wie man (für Teilchen mit ganzzahligem Spin) auf das richtige Ergebnis kommt:

**Kasten 5.3: Rezept zur quantenmechanischen Interferenz
(gültig für Bosonen, z.B. Photonen, α -Teilchen)**

Kann ein beobachteter Endzustand durch verschiedene mögliche Abläufe zu Stande kommen, dann

- **darf** man die **Intensitäten** der einzelnen Abläufe **inkohärent** addieren, wenn man die Abläufe “im Prinzip” durch verfeinerte Messung hätte separieren können,
- **muss** man die **Amplituden** der einzelnen Abläufe **kohärent** addieren, wenn sie *prinzipiell nicht* zu unterscheiden sind.

Das sieht auf den ersten Blick ganz ähnlich aus wie bei der Interferenz von Lichtwellen (oder Materiewellen) nach dem Durchgang durch den Doppelspalt. Der Endzustand ist dann das Auftreffen des Photons (bzw. Elektrons) auf dem Schirm beim Ort x . Die beiden verschiedenen möglichen Abläufe sind: Durchtritt des Photons (bzw. Elektrons) entweder durch Spalt A oder B. Dass die Interferenz verschwindet, wenn man den Versuchsaufbau geeignet erweitert, um beide Möglichkeiten unterscheiden zu können, wurde als *Gedanken-Experiment* in den Anfangsjahren der Quantenmechanik so heftig diskutiert, dass dieser

²⁵ Auch ein eventuell zusätzlich vorhandenes äußeres Schwerfeld hebt sich dabei exakt heraus, wenn es homogen ist. Daher ist dieser Satz aufgrund alltäglich sichtbarer Auswirkungen fest in unsere Anschauung eingebaut. Man denke nur an die Schwierigkeit, die Gezeiten anschaulich zu erklären (woran auch Galilei scheiterte): Sie entstehen, weil sich für die Erde das Schwerfeld von Mond und Sonne wegen seiner Inhomogenität nicht ganz heraushebt.

²⁶ wird in Kap. 9.3.3 nachgeliefert

deutsche Ausdruck in die internationale wissenschaftliche Diskussion um den Welle-Teilchen-Dualismus einfluss. Jedoch Vorsicht hier: Der Vergleich mit dem Doppelspalt-Versuch ist beim vorliegenden Problem mit identischen Teilchen nur oberflächlich brauchbar. Begrifflich führt er völlig in die Irre, wie in Kap. 5.7.3 am Fall identischer Fermionen gezeigt wird.

Im α - α -Streuexperiment heißen die beiden im Rezept genannten Abläufe

- “Projektil wird in den Detektor abgelenkt”, und
- “Targetkern wird in den Detektor gestoßen”.

So verschieden sie auch erscheinen mögen, im Fall, dass beide Teilchen vom selben Typ – also **identische Teilchen** – sind, sind die beiden Abläufe **prinzipiell** nicht zu unterscheiden, zunächst einmal jedenfalls nicht mit physikalischen Methoden. Anders als Billard-Kugeln *kann* man α -Teilchen-Projektile und He-Target-Kerne nicht rot bzw. grün einfärben. Ohnehin sind die Namen “Projektil” und “Target” im Fall identischer Teilchen Zuschreibungen, die vom Bezugssystem abhängen. In dem Bezugssystem, in dem das eingestrahlte α -Teilchen ruht, scheinen beide ihre Rolle komplett vertauscht zu haben, und im Schwerpunktsystem gibt es dieses (scheinbare) Unterscheidungsmerkmal schon grundsätzlich nicht mehr. Dass man aber auch nicht einmal im Geiste *versuchen* darf, die zwei identischen Teilchen zu unterscheiden, wird sich in Kap. 9.3.3 gerade als Grundlage dieses Rezepts herausstellen.

In der Quantenmechanik ergibt sich der einfache Rutherford-Querschnitt $(d\sigma/d\Omega)_{Rutherford} = |f_{Coul}(\theta)|^2$ mit der Coulomb-Streuamplitude $f_{Coul}(\theta)$ nach Gl. (5.14). Nach dem “Rezept” (Kasten 5.3) ist die gesamte Streuamplitude für den α - α -Stoß die kohärente Summe der Amplituden

$$f^+(\theta) = f(\text{Projektil} \rightarrow \theta) + f(\text{Target} \rightarrow \theta). \quad (5.21)$$

Dabei ist

$$\begin{aligned} f(\text{Projektil} \rightarrow \theta) &= f_{Coul.}(\theta), \\ f(\text{Target} \rightarrow \theta) &= f(\text{Projektil} \rightarrow \pi - \theta) = f_{Coul.}(\pi - \theta) \end{aligned}$$

Ergebnis:

$$f^+(\theta) = f_{Coul.}(\theta) + f_{Coul.}(\pi - \theta). \quad (5.22)$$

Bei $\theta = \pi/2$ ergibt sich mit $f^+(\pi/2) = 2 f_{Coul.}(\pi/2)$ eine Verdoppelung der Amplitude, und für die Intensität erfolgt durch das Quadrieren die gesuchte zweite Verdopplung (wie stets bei konstruktiver Interferenz von zwei Wellen mit gleich großen Amplituden, vgl. Licht am Doppelspalt).

Mott-Wirkungsquerschnitt. Bei beliebigem Winkel liefert diese kohärente Überlagerung:

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{kohärent+}}(\theta) &= |f^+(\theta)|^2 \\ &= |f_{Coul.}(\theta)|^2 + |f_{Coul.}(\pi - \theta)|^2 \\ &\quad + \{f_{Coul.}^*(\theta) f_{Coul.}(\pi - \theta) + f_{Coul.}(\theta) f_{Coul.}^*(\pi - \theta)\}. \quad (5.23) \\ &= \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Ruth.}}(\theta) + \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Ruth.}}(\theta - \pi) + \{\text{Interferenzterm}\} \end{aligned}$$

Diese Formel heißt Mott-Wirkungsquerschnitt und stimmt tatsächlich hervorragend mit der gemessenen Winkelverteilung der α - α -Streuung überein – s. die Kurve σ -Mott und die Messpunkte in der Abb. 5.7. Dabei kommt das Interferenzmuster nur dann richtig heraus, wenn man die komplexe Coulomb-Phase in $f_{Coul.}$ berücksichtigt, die – wie in Abschnitt 5.4.1 am Ende erwähnt wurde – erst nach der exakten Berechnung der Streu-Amplitude auftritt. So macht die Quantenmechanik identischer Teilchen tatsächlich möglich, Streuwellen zu verschiedenen Beobachtungswinkeln miteinander zur Interferenz zu bringen.

5.7.3 Destruktive Interferenz bei Fermionen

Eine neue Art von quantenmechanischer Überlagerung. Das erfolgreiche Rezept, dem wir die Übereinstimmung der theoretischen Kurve mit dem Experiment verdanken, ist oben (Kasten 5.3) so formuliert worden, als ob man es in einer Analogie zum Welle-Teilchen-Dualismus verstehen dürfte, nicht anders als die kohärente Summe der Huygensschen Elementarwellen in der Wellenoptik (z.B. bei Interferenzen am Doppelspalt). So “einfach” ist es aber gar nicht. Für Teilchen von Typ Fermion (d.h. Spin halbzahlig) gilt an Stelle des letzten Satzes im Rezept nämlich einer mit umgekehrtem Vorzeichen:

**Kasten 5.4: Rezept zur quantenmechanischen Interferenz
(abweichend von Kasten 5.3 gültig für Fermionen, z.B. Elektronen, Protonen)**

(Kann ein Endzustand)durch zwei Abläufe entstehen,
die sich durch Vertauschung von zwei Teilchen unterscheiden (...)

- (darf man ... inkohärent addieren, wenn man beide Abläufe im Experiment hätte separieren können)
- **muss** man die Amplituden der beiden Abläufe **kohärent subtrahieren**, wenn eine Unterscheidung der beiden Abläufe prinzipiell unmöglich ist.

In Formeln:

$$\begin{aligned} f^-(\theta) &= f(\text{Projektil} \rightarrow \theta) - f(\text{Target} \rightarrow \theta) \\ &= f_{Coul.}(\theta) - f_{Coul.}(\pi - \theta). \end{aligned} \quad (5.24)$$

Das ist zwar sicher eine Art Interferenz, aber wegen des Vorzeichens ganz anders als sonst von Wellenphänomenen her bekannt.

Folgen der Ununterscheidbarkeit. Die quantenmechanische Begründung beider Regeln beruht auf der Eigenschaft der vollkommenen Ununterscheidbarkeit der Elementarteilchen gleichen Typs, wie in Kapitel 9.3.3 näher ausgeführt. Die wesentliche Konsequenz wurde schon am Ende von Kap. 5.5.4 dargestellt: Wenn in der Wellenfunktion die Koordinaten zweier identischer Teilchen vollständig ausgetauscht werden, muss die Funktion im Fall von Bosonen die gleiche bleiben, bei Fermionen genau ihr Vorzeichen ändern. Um dies sicherzustellen, muss man die Wellenfunktion $\Psi(\text{Teilchen1}, \text{Teilchen2})$ um einen Term $\pm\Psi(\text{Teilchen2}, \text{Teilchen1})$ erweitern, in dem beide Teilchen ihre Rollen vertauscht haben. Das Vorzeichen bestimmt sich dabei nach der Teilchenart. Bei der Berechnung mit den hierdurch richtig symmetrisierten Wellenfunktionen überträgt sich das Vorzeichen in die beiden als “Rezepte” formulierten Vorschriften, die sich auf die mit den unmodifizierten Wellenfunktionen berechneten Streuamplituden beziehen (z.B. wie in Gl. 5.9).

Experimentelle Demonstration. Auch bei Fermionen ließ die experimentelle Prüfung (und Bestätigung!) dieser überaus merkwürdigen Vorhersage der Quantenmechanik nicht lange auf sich warten (Stöße von Protonen in Wasserstoffgas, Christian Gerthsen 1933).

In der neueren Literatur gibt es zur Illustration des so unterschiedlichen Verhaltens zweier Teilchen in den drei Fällen

- unterschiedliche Teilchen,
- identische Bosonen,
- identische Fermionen

ein schönes Demonstrationsexperiment (Abbildung 5.8). Projektil und Target sind hier ganze Kohlenstoff-Kerne verschiedener Isotope. Ein Kern ^{12}C (Kerndrehimpuls $I = 0$) *verhält* als Ganzes sich wie ein einziges Boson, ^{13}C (Kerndrehimpuls $I = 1/2$) wie ein einziges Fermion, immer solange die Nukleonen zweier solcher Kerne nicht anfangen, einzeln miteinander zu reagieren.²⁷ Daher wurden die Messungen bei so niedriger kinetischer Energie gemacht, dass Projektil und Target immer großen Abstand ($\gg R_K$) halten (und man normalerweise von der Gültigkeit der klassischen Mechanik und zwei unverwechselbaren Trajektorien ausgehen könnte, vgl. Gl. 5.4).

In Abbildung 5.8 stellt das obere Diagramm die Winkelverteilung von ^{13}C -Projektilen nach Stößen mit ^{12}C -Targetkernen dar, also recht ähnlichen, aber doch unterscheidbaren Teilchen. Nur die Projektilen wurden im Detektor gezählt. Entsprechend folgen die Messwerte genau der einfachen Rutherford-Formel Gl. (5.15) – vgl. die durchgezogene Kurve.

Der mittlere Teil der Abbildung 5.8 gehört zur ^{12}C - ^{12}C -Streuung, also zum Fall identischer Bosonen. Die durchgezogene Kurve ist diesmal nach Gl. 5.23 mit positiver kohärenter Summe der einfachen Streuamplituden gerechnet.

Das untere Diagramm in Abbildung 5.8 zeigt die Ergebnisse der ^{13}C - ^{13}C -Streuung, also den Fall identischer Fermionen. Hier ist das Verhalten etwas komplizierter. Erklärungsbedürftig ist wohl zuerst, dass die Zählrate auch bei 90° nicht ganz auf Null absinkt, wie man doch aufgrund des Rezepts nach Gl. (5.24) erwarten müsste:

$$f^-(\theta = \frac{\pi}{2}) = f_{\text{Coul.}}(\frac{\pi}{2}) - f_{\text{Coul.}}(\frac{\pi}{2}) \Rightarrow \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{kohärent-}}(\frac{\pi}{2}) = 0. \quad (5.25)$$

Zwar sieht man hier ein deutliches Interferenz-Minimum, es zeigt aber eine von Null verschiedene Zählrate: quantitativ genau dieselbe wie das oberste Diagramm, wo (im Fall *nicht* identischer Teilchen) nur die abgelenkten Projektilen gezählt wurden.

Der Grund liegt darin, dass die Fermionen immer einen Eigendrehimpuls haben, an dessen Stellung sie sich unterscheiden lassen *könnten* (anders als Teilchen mit $I=0$ wie α -Teilchen und ^{12}C -Kerne). Hätte man im gezeigten Experiment die ^{13}C -Projektilen ($I = 1/2$) in $(+z)$ -Richtung polarisiert und die ^{13}C -Targetkerne in $(-z)$ -Richtung (oder umgekehrt), dann hätten man am Detektor im Prinzip noch die Möglichkeit gehabt, beide voneinander zu unterscheiden (denn die Coulomb-Streuung lässt bei diesen kleinen Energien Bahn- und Spindrehimpulse getrennt unverändert). Nur wenn Projektil und Target ihren Drehimpuls parallel haben, sind sie *prinzipiell* ununterscheidbar, und dann gilt wirklich Gl. (5.24).²⁸

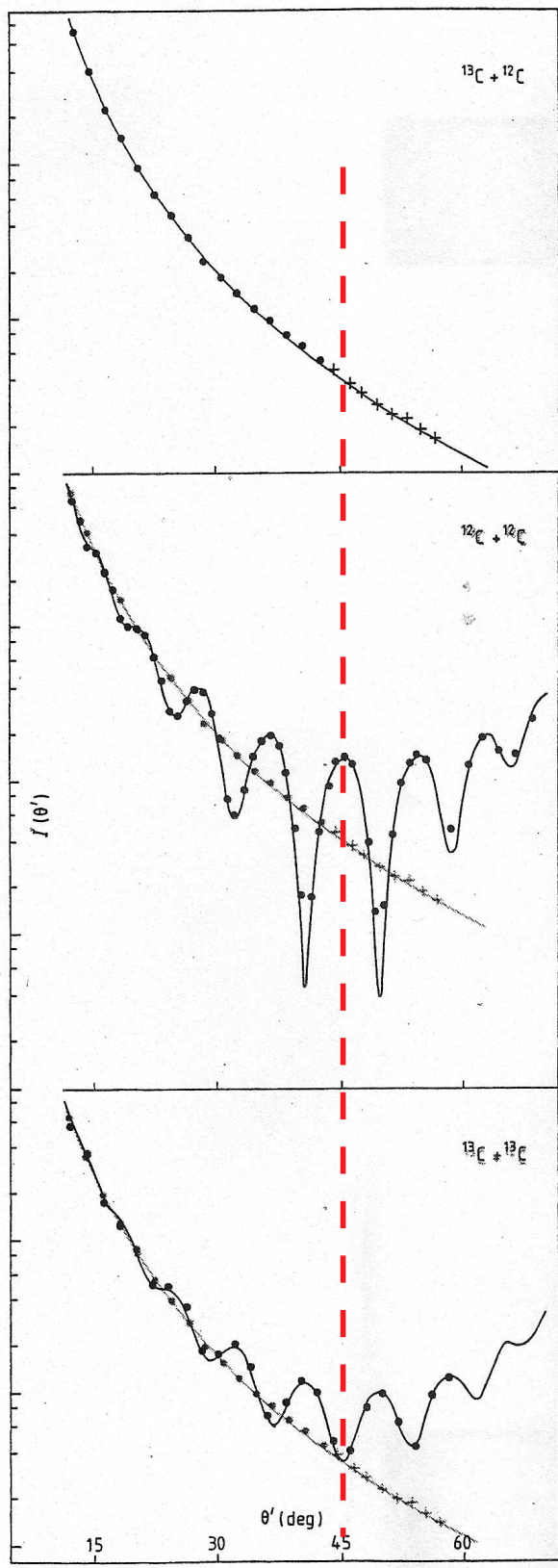
Da es extrem aufwändig ist, Kerne zu polarisieren, werden Streu-Experimente üblicherweise mit unpolarisierten Teilchen gemacht. Weil es bei $I = 1/2$ nur zwei Basiszustände gibt, entfällt auf jeden genau die Hälfte aller mitwirkenden Teilchen. Daher waren in 50% der ^{13}C - ^{13}C -Stöße beide Drehimpulse antiparallel, in den anderen 50% parallel. Für die ersten 50% ist also die inkohärente Summation anzuwenden (Gl. 5.22), für die zweiten 50% zweiten die kohärente Subtraktion (Gl. 5.24).

Betrachten wir den Wert bei 90° , wo die Zählrate genau so groß ist wie sie aus der einfachen Rutherford-Formel herauskommen würde. Für die 50% der stoßenden Teilchen-Paare mit parallelem Drehimpuls ist kohärente Subtraktion der Streuamplituden anzuwenden (Gl. 5.25), und das ergibt vollständig destruktive Interferenz, also die Zählrate Null. Die im Experiment tatsächlich beobachtete Zählrate stammt ausschließlich von den anderen 50%, wo Projektil und Target sich an ihrem Drehimpuls unterscheiden lassen könnten und ihre einzelnen Zählraten daher inkohärent summiert werden dürfen. Das bewirkt gerade eine Verdoppelung der Zählrate nach dem einfachen Rutherford-Querschnitt, betrifft aber eben nur 50% aller ins Experiment geschickten Teilchen, so dass insgesamt richtig wieder der ursprüngliche Rutherford-Wert herauskommt.

Der differentielle Wirkungsquerschnitt wird daher bei allen Winkeln aus 50% inkohärent summierter Rutherford-Streuung und 50% kohärenter Subtraktion der Streuamplituden zusammengesetzt (durchgezo-

²⁷Mehr zu Spins und Vertauschungssymmetrie der Kerne in Kap. 7.1.4ff.

²⁸Für Bosonen mit Spin $I = 1, 2, \dots$ müsste man diese Überlegungen auch durchführen, im Fall paralleler Spins die einzelnen Amplituden aber mit positivem Vorzeichen überlagern.



Oben:

Stoß verschiedener Teilchen

Projektil: ^{13}C

Target: ^{12}C

Beobachtet wird nur das gestreute Projektil (Messpunkte, bei den kleineren Intensität mit sichtbaren Fehlerbalken). Es gilt die einfache Rutherfordformel (durchgezogene Linie).

Mitte: Stoß zweier identischer Teilchen ^{12}C . Bei 90° ist ein Interferenzmaximum, die Intensität ist gegenüber der Rutherford-Verteilung vervierfacht.

Die durchgezogene Kurve ist mit Addition der Streuamplituden von Target und Projektil berechnet (Gl. 5.21, gültig für Bosonen).

Unten: Stoß zweier identischer Teilchen ^{13}C . Bei 90° ist ein Interferenzminimum, die Intensität ist gerade gleich der einfachen Rutherford-Verteilung.

Die durchgezogene Kurve ist mit teilweisem Subtraktion und Addition der Streuamplituden von Target und Projektil berechnet (Gl. 5.26), gültig für unpolarisierte Fermionen).

Abbildung 5.8:

Eine Demonstration der Besonderheit identischer Teilchen: Winkelverteilungen bei der Coulombstreuung unterscheidbarer oder identischer Teilchen.

Punkte: Messergebnisse, Linien: theoretische Vorhersagen. Die rote Linie gibt den Streuwinkel 90° im S-System an (45° im L-System). Zum genaueren Vergleich ist die einfache Rutherford-Verteilung aus dem obersten Teilbild überall hineinkopiert.

(Abbildung nach [7].)

gene Kurve in Abbildung 5.8 unten):

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Fermionen, unpolarisiert}} &= \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{inkohärent}}(\theta) + \frac{1}{2} \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{kohärent-}}(\theta) \quad (5.26) \\
 &\equiv \frac{1}{2} \left(|f_{Coul.}(\theta)|^2 + |f_{Coul.}(\pi - \theta)|^2 \right) + \frac{1}{2} \left(|f_{Coul.}(\theta) - f_{Coul.}(\pi - \theta)|^2 \right) \\
 &\left[\equiv \frac{1}{4} \left(|f_{Coul.}(\theta) + f_{Coul.}(\pi - \theta)|^2 \right) + \frac{3}{4} \left(|f_{Coul.}(\theta) - f_{Coul.}(\pi - \theta)|^2 \right) \right].
 \end{aligned}$$

[Die Umformung in der letzten Zeile wird erst im Kap. 7.1.4 wichtig.]

Fazit I. Die hervorragende Übereinstimmung aller dieser Messungen mit den theoretischen Kurven spricht sehr für die in den “Rezepten” geforderte Interferenz. Indes ist diese nicht gerade einfach zu verstehen: Soll man doch zwei quantenmechanisch berechnete Amplituden kohärent überlagern, die

- entweder zum selben Teilchen, dann aber zu entgegengesetzten Ausbreitungsrichtungen gehören (nämlich zu θ bzw. $\pi - \theta$, s. Gl. (5.22, 5.24))
- oder für dieselbe Richtung θ gelten, dann aber nicht zum selben Teilchen gehören (sondern einmal zum Projektil, das andere Mal zum Targetkern: s. Gl. 5.21).

Zudem muss bei dieser Addition der Amplituden das Vorzeichen danach bestimmt werden, ob die Teilchen halb- oder ganzzahligen Spin haben, auch wenn die während des Stoßprozesses wirkenden Kräfte genau dieselben und vom Spin ganz unabhängig sind. Eine befriedigende Begründung dieses Vorgehens basiert darauf, das Konzept von “identischen” bzw. “ununterscheidbaren” Teilchen grundlegend zu überdenken und in den Formalismus der Quantenmechanik einzubauen. Mehr dazu in Kap. 9.

Fazit II. Diese Ununterscheidbarkeit von Teilchen der gleichen Sorte ist etwas prinzipiell Neues, wird aber vom Formalismus der Quantenmechanik schon richtig behandelt. Die Konsequenzen sind anschaulich kaum nachzuvollziehen. Nehmen wir allein die Zählrate bei Ablenkung um 90° : Schon deren Verdoppelung bei α -Teilchen durch konstruktive Interferenz von Amplituden für Projektil- und Target-Teilchen ist eine ziemliche Attacke für die normale Anschauung. Noch stärker jedoch ist das “gefühlte Unverständnis” vielleicht bei dem *vollständigen Verbot* der 90° -Ablenkung im Fall von zwei Fermionen mit parallelem Spin.

Literaturverzeichnis

- [1] DEMTRÖDER, WOLFGANG: *Experimentalphysik Bd. 4: Kern-, Teilchen- und Astrophysik*. Springer, Berlin [u.a.], 1998.
- [2] HEISENBERG, W.: *Über quantentheoretische Umdeutung kinematischer und mechanischer Beziehungen*. Zeitschrift für Physik A Hadrons and Nuclei, 33(1):879–893, 1925.
- [3] HEYDENBURG, NP und GM TEMMER: *Alpha-Alpha Scattering at Low Energies*. Physical Review, 104(1):123–134, 1956.
- [4] HILSCHER, HELMUT: *Kernphysik*. Vieweg, Braunschweig [u.a.], 1996.
- [5] MAYER-KUCKUK, THEO: *Kernphysik*. Teubner, Stuttgart [u.a.], 2002.
- [6] MESSIAH, ALBERT: *Quantum mechanics*, Band 1. North-Holland, Amsterdam, 1970.
- [7] PLATTNER, G.R. und I. SICK: *Coherence, interference and the Pauli principle: Coulomb scattering of carbon from carbon*. European Journal of Physics, 2:109–113, 1981.
- [8] SACKUR, O.: *Die universelle Bedeutung des sog. elementaren Wirkungsquantums*. Annalen der Physik, 345(1):67–86, 1913.
- [9] SCHRÖDINGER, E.: *Quantisierung als Eigenwertproblem (Erste Mitteilung)*. Annalen der Physik, 79:361–376, 1926.
- [10] SCHRÖDINGER, E.: *Quantisierung als Eigenwertproblem (Erste Mitteilung)*. Annalen der Physik, 79:361–376, 1926.
- [11] WIEDEMANN, BERNHARD, GERTRUD WALTER und KLAUS BETHGE: *Kernphysik*. Springer, Berlin [u.a.], 2001; 2001.

Index

- 2-Körper-System
 - identische Teilchen – kein klass. Grenzfall, 5023
 - klassisch, 5023
- 2-Teilchen-Reaktion
 - Stoß
 - elastischer, 5004
- Alltagsbeobachtung
 - 2-Körper-System von Schwerpunktbewegung unbeeinflusst, 5023
- Antisymmetrie
 - bei Vertauschung identischer Teilchen, 5025
- Atomstrahl-Laser, 5012
- Austauschsymmetrie
 - bei identischen Teilchen, 5022, 5025
- Born, Max
 - Bornsche Näherung, 5006
- Bose-Einstein-Kondensation, 5012
- Boson
 - positive Vertauschungs-Symmetrie, 5023, 5025
- charakteristischer Parameter
 - für Ausdehnung des Streuzentrums, 5011
 - für Längenskala bei Interferenzeffekten, 5013
 - für Test auf Zulässigkeit klassischer Berechnung, 5005
- Coulomb-Phase, 5010, 5024
- Coulomb-Potential
 - abgeschirmtes, 5008, 5010
- Coulomb-Streuung
 - Streuamplitude/Wirkungsquerschnitt, 5008
 - an Ladungsverteilung, 5014
 - klassische Rechnung auch quantenmechanisch richtig, 5010
 - wellenmechanische Charakterisierung, 5010
- Davisson, Clinton J.
 - Interferenz von Elektronen an Kristallen , 5013
- de Broglie, Luis, 5005
 - Materie-Welle, 5005, 5011
- Dekohärenz, 5013
- Delta-Funktion, 5016
- Dirac, Paul A.C.
 - Besonderheit identischer Teilchen, 5022
- Doppelspalt-Experiment
 - vs. Stoß identischer Bosonen, 5023
 - vs. Stoß identischer Fermionen, 5024, 5025
- Ehrenfestsches Theorem, 5005
- Eigenzustand
 - vs. Wellenpaket, 5005
- Einheitszelle
 - Kristall-Gitter, 5016
 - Phasenraum, 5003
- Endzustand
 - beim Stoß, 5007
- Entropie
 - klassische Berechnung und Wirkungsquantum, 5003
- Erwartungswert, 5002
- Fehlerfortpflanzungsgesetz, 5012
- Fermion
 - Stoß zweier identischer, 5025
 - negative Vertauschungs-Symmetrie, 5025
- Formfaktor, 5016
- Fourier-Transformierte
 - Coulomb-Potential, 5009
 - der Ladungsverteilung: Formfaktor, 5016
 - des Potentials: Streuamplitude, 5008
- Fourier-Zerlegung
 - der Streuwelle, 5007
- freies Teilchen, 5005
- Gangunterschied, 5012
 - Hofstadter-Streuung, 5015
- Gedanken-Experiment
 - Doppelspalt-Versuch, 5023
- Germer, Lester H.
 - Interferenz von Elektronen an Kristallen , 5013
- Gerthsen, Christian
 - Interferenz von Projektil und Target bei p - p -Stößen, 5025
- Gezeiten – warum unanschaulich?, 5023
- Gitterkonstante, 5013
- Goldene Regel
 - ergibt auch Wirkungsquerschnitt, 5007
- Hamilton-Operator, 5005

- ungestörter, 5006
- harmonischer Oszillator
 - Phasenraum-Volumen klass./quantenmech., 5003
- Heisenberg, Werner
 - Besonderheit identischer Teilchen, 5022
 - Matrizen-Mechanik, 5003
 - Quantenmechanik, 5001
 - Unbestimmtheitsrelation (1928), 5005
- Helium
 - Streuung von α -Teilchen, 5004
- Hg
 - Entropie und Quantisierung des Phasenraums (1913), 5003
- Hofstadter, Robert
 - Elektron-Streuung am Kern, 5014
 - Nukleon nicht punktförmig, 5014
- Huygenssche Elementarwellen
 - kohärente Summierung, 5025
- identische Teilchen
 - Projektile und Target, 5022
 - Stoß, 5024
 - Vertauschung, 5022
 - Widerspruch zum klassischen Grenzfall, 5023
 - immer in verschränktem Zustand, 5014
- Impulsübertrag
 - in Bornscher Näherung, 5008
- inkohärente Summe, 5011
 - Streuung verschiedener Teilchen, 5021
 - bei Energie-Unschärfe, 5014
- Interferenz
 - Dekohärenz zeitlich/räumlich, 5013
 - bei α - α -Streuung, 5022
 - bei Streuung am Kern, 5014
 - destruktiv bei ident. Fermionen, 5026
 - konstruktiv bei ident. Bosonen, 5024
 - von Projektil und Targetkern, 5022, 5025
- Interferenz-Maximum
 - Lichtbeugung, 5011
 - bei α - α -Streuung, 5022
- Interferenzterm
 - wann ist er Null?, 5012
- Kern
 - Form der Ladungsverteilung, 5017
 - Radius, 5005, 5017
- Klassische Mechanik
 - Grenzfall der Quantenmechanik, 5005
 - nicht Grenzfall der Quantenmechanik, 5023
- klassischer Grenzfall
 - bei Rutherford-Streuung, 5005
 - nie bei Stößen identischer Teilchen, 5023
 - selbst mit $\hbar \rightarrow 0$ nicht erreichbar, 5003
- kohärente Überlagerung
 - bei Wellen immer richtig, 5011
 - bei identischen Teilchen immer, 5014
 - manchmal folgenlos, 5014
 - vs. inkohärente, 5011
- Kommutator
 - bewirkt Quantisierung, 5003
- Kristallgitter, 5013
- Laue, Max v.
 - Interferenz von Röntgenstrahlen an Kristallen, 5013
- Lichtquant
 - Quantisierung entdeckt (Planck 1900), 5003
- Massenpunkt
 - macht Trajektorie, 5008
 - oder Welle?, 5003
- Materiewelle, 5003, 5005
- Matrizelement
 - für Streuung, 5007
- Matrizen-Mechanik
 - Heisenberg, Born, Jordan (1925), 5003
- Mechanik
 - Klassische (1700. . .), 5023
 - Klassische (ab 1700. . .), 5005
- Mott, Nevill
 - Interferenz von Projektil- und Targetzustand, 5022
- Nahfeldmikroskopie, 5016
- Newtonsche Mechanik
 - Grenzfall der Quantenmechanik, 5005
- Nukleon (N)
 - nicht punktförmig, 5014
- Operator, 5003
 - Energie, 5005
 - Ort, Impuls, Bahn-Drehimpuls, 5003
 - Vertauschungsregel bewirkt Quantisierung, 5003
- Oppenheimer, I. Robert
 - Interferenz von Projektil- und Targetzustand, 5022
- Phasenraum-Volumen
 - harmonischer Oszillator, 5003
 - klassisch vs. quantenmechanisch, 5003
- Planck, Max
 - Strahlungsgesetz (1900), 5003
- Produkt-Zustand
 - nur bei unterscheidbaren Teilchen, 5003
- Prozess
 - ist Zustands-Änderung, 5005
- Quanten-Phänomene
 - makroskopische, 5012

- Quantencomputer, 5012
- Quantenmechanik
- Basiswissen, 5001
 - Bornsche Näherung, 5006
 - Differentieller Wirkungsquerschnitt, 5007
 - Glücksgriff, 5023
 - Prüfsteine, 5004
 - Stoß-Prozess, 5005
 - klassischer Grenzfall, 5005
 - nicht erreichbar, 5003, 5021
 - partiell erreichbar, 5003
- Quantenphänomene
- bei identischen Teilchen, 5021
- Quantisierung, 5003
- via klass. Phasenraum, 5003
- reduzierte Masse
- im äquivalenten 1-Teilchen-System, 5023
- Regularisierung divergierender Integrale, 5008
- Reichweite
- der Wechselwirkung
 - Kernkräfte, 5008
 - abgeschirmtes Coulomb-Pot., 5008
- reziprokes Gitter, 5016
- Rutherford-Formel
- falsch wenn Projektil und Target ident. Teilchen, 5021
- Rutherford-Streuung
- anomale, 5011
 - quantenmechanisch exakt bestätigt, 5010, 5014
 - quantenmechanisch stark modifiziert, 5022
- Sackur, Otto
- \hbar hat universelle Bedeutung (1913), 5003
- Sackur-Tetrode
- Entropie klassisch, 5003
- Schrödinger, Erwin
- Wellen-Mechanik (1926), 5003
- Schrödinger-Gleichung (1925)
- bestimmt Zustandsänderung, 5004
 - ergibt Quantisierung des Phasenraumvolumens, 5003
- Schrödinger-Gleichung (1926), 5006
- Schuhputzen wellentheoretisch, 5013
- Schwerefeld
- Wirkung im 2-Teilchen-System, 5023
- Schwerpunktsystem, 5023
- Shull, Clifford G.
- Interferenz von Neutronenstrahlen an Kristallen, 5013
- Simulations-Methode, 5016
- Skalarprodukt
- von Zustandsvektoren, 5007
- Spin $1/2$
- kann bei identischen Fermionen Unterscheidung ermöglichen, 5026
- Störoperator
- Streupotential, 5006
- Störungstheorie
- 1. Ordnung, 5007
- Standard-Abweichung
- in Unschärfe-Relation, 5005
- Stoß
- elastischer
 - ist Impulsübertrag, 5005
 - quantenmechanisch, 5005
 - in Bornscher Näherung, 5008
 - und Streuung, 5004
 - von identischen Teilchen
 - klassisch, 5021
 - quantenmechanisch, 5022
- Streuamplitude, 5007, 5016
- Fourier-Transformierte des Potentials, 5008
- Streuung
- elastische, 5014
 - und Stoß, 5004
- Streuwelle, 5007, 5030
- Gangunterschiede, 5012
 - am Kern, 5014
 - kugelförmig, 5006
 - mehrere, *siehe* kohärent, inkohärent
 - und reziprokes Gitter, 5016
- Streuzentrum
- Formfaktor, 5016
 - ausgedehntes, 5014
 - mehrere, 5011
- Superposition
- bei Vektoren, 5002
 - bei gleichartigen Wellen, 5003
- Supraleitung, 5012
- Symmetrie
- bei Vertauschung identischer Teilchen, 5023
- Teilchenstrom, 5005
- Thomson, George P.
- Interferenz von Elektronen an Kristallen, 5013
- Trajektorien
- und Wirkungsquerschnitt, 5007
- Trefferfläche, 5008
- Überlagerung, inkohärente, 5012
- bei Energie-Unschärfe, 5013
- Überlagerung, kohärente, 5010
- makroskopisch, 5012
 - nur bei fester Phase wichtig, 5012
 - von Target- und Projektil, 5021
 - vs. inkohärente, 5011
- Unbestimmtheitsrelation, *siehe* Unschärfe-Relation

- unpolarisierte Teilchen
 - Streuexperimente, 5026
- Unschärfe-Relation
 - Ort-Impuls, 5005
- Ununterscheidbarkeit von Teilchen (siehe auch *identische Teilchen*), 5028
 - Symmetrie der Wellenfunktion, 5022
 - geprüft durch Nachmessen, 5021
- verschränkter Zustand, 5003, 5014
- Versuch und Irrtum
 - in der Quantenmechanik, 5003
- Wahrscheinlichkeitsdeutung
 - der Wellenfunktion, 5007
- Wasser
 - Oberfläche
 - Spiegel, 5013
 - Tropfen
 - diffuse Reflektion, 5013
- Welle
 - nur in einem Medium?, 5003
- Welle-Teilchen-Dualismus, 5003, 5013
 - Doppelspalt-Experiment, 5024
- Wellen-Mechanik, 5003
- Wellenfront, 5008
- Wellenlänge, 5005
 - und spiegelnde Flächen, 5013
- Wellenpaket
 - für Ort und Impuls, 5005
- Wellenvektor, 5005
- Winkel
 - polar/azimutal, 5008
- Wirkungsquerschnitt
 - Bedeutung in der Quantenmechanik, 5008
 - differentieller, 5007
- Zufallsfehler quadratisch summieren, 5012
- Zustand
 - Produkt-Zustand, 5003
 - klassischer vs. quantenmechanischer, 5002
- Zustandsänderung
 - Streuung, 5005
 - ist ein Prozess, 5005
- Zwei-Körper-System, *siehe* 2-Körper-System