

Die Elementaren Teilchen in der Modernen Physik

Von Atomen, Kernen, Quanten, Quarks

Notizen und Stichworte

zu einer Vorlesung für Physikstudierende mittlerer Semester

Jörn Bleck-Neuhaus

Entwurf 10. Juni 2009 21:25

Kapitel 9

(frei zur Nutzung zum Selbststudium,
um kurze Rückmeldung an bleck@physik.uni-bremen.de wird gebeten)

Inhaltsverzeichnis

9 Photon und Elektron – was Elementarteilchen sind und wie sie wechselwirken:	
9.0 Überblick	9000
9.1 Welle-Teilchen-Dualismus	9002
9.2 Das Photon: Ein Teilchen, das erzeugt und vernichtet werden kann	9004
9.2.1 Vom Wellenquant zum Teilchen	9004
9.2.2 Vom Teilchen zum Feldquant	9007
9.3 Das Elektron (und andere Elementarteilchen): Erste Merksätze	9008
9.3.1 Alle Elementarteilchen können erzeugt und vernichtet werden.	9008
9.3.2 Zu Teilchen gibt es Antiteilchen.	9008
9.3.3 Elementarteilchen der gleichen Sorte sind vollständig ununterscheidbar.	9008
9.4 Zweite Quantisierung / Anfänge der Quanten-Feldtheorie	9013
9.4.1 Freie Teilchen im Vakuum	9013
9.4.2 Der Hamilton-Operator für freie Teilchen	9014
9.4.3 Mögliche Prozesse und der Hamilton-Operator mit Wechselwirkungen	9015
9.5 Der grundlegende Prozess der elektromagnetischen Wechselwirkung	9016
9.6 Virtuelle Photonen	9017
9.7 Feynman-Graphen	9023
9.7.1 Elementare Prozesse	9023
9.7.2 Elektron-Elektron-Wechselwirkung (virtuelles Photon beteiligt)	9024
9.7.3 Elektron-Photon-Wechselwirkung (virtuelles Elektron beteiligt)	9024
9.7.4 Photonen-Emission (virtuelles Elektron und virtuelles Photon beteiligt)	9024
9.7.5 Feynman-Regeln	9025
9.7.6 Antiteilchen	9027
9.7.7 Renormierung	9029
9.8 Deutung der Austauschwechselwirkung	9031
Literaturverzeichnis	9033
Index	9034

1

¹(Für die weitere Bearbeitung: Die Seitenzahlen sollen die Kapitelnummer erkennen lassen. Doppelte Klammern oder Fragezeichen markieren unfertige Stellen.)

9 Photon und Elektron – was Elementarteilchen sind und wie sie wechselwirken:

Die Quantenelektrodynamik

9.0 Überblick

Ab dem 9. Kapitel konzentriert sich der Text auf die Darstellung des einheitlichen, überaus erfolgreichen, aber nicht unmittelbar anschaulichen Bildes, das die Physik entwickelt hat, um sowohl die innerste Beschaffenheit der Materie als auch die fundamentalen Schritte aller ihrer möglichen Prozesse physikalisch zu beschreiben. In seiner heutigen Form, die seit den 1970er Jahren entwickelt wurde, wird es einfach das Standard-Modell der Elementarteilchen-Physik genannt.

Ausgangspunkt und zentraler Begriff hierbei ist der Welle-Teilchen-Dualismus, d.h. die Aufgabe, zwei anschaulich so unvereinbar daher kommende Modellvorstellungen wie *ausgedehnte Wellen* einerseits und *punktförmige Teilchen* andererseits zusammenzuführen. Dies Problem war zuerst durch Entdeckungen an der elektromagnetischen Strahlung (Photon, ca. 1905-1923) und danach am Elektron (de Broglie-Welle, ca. 1923-1928) aufgetaucht. Es wurde damals (unter Nobelpreisträgern) wie heute (in Lehrbüchern zur Quantenmechanik) in aller Breite diskutiert, z.B. unter dem Stichwort Doppelspalt-Experiment¹. Wo es aber nicht mehr nur um schon vorhandene Teilchen geht, sondern auch um deren Entstehen und Vergehen, unterscheiden sich die Konzepte Welle und Teilchen nicht nur hinsichtlich Ausgedehntheit und Punktförmigkeit. Im Welle-Teilchen-Dualismus mussten daher mehr Gegensätze vereint werden als nur dieser eine.

Erster Markstein der darauf gegründeten Entwicklung war die Behandlung der Erzeugung und Vernichtung der Photonen als Quanten des elektrodynamischen Feldes (Dirac, Jordan, Heisenberg, Fermi 1926-1932. Ihr Verfahren wurde als Feld-Quantisierung, Quanten-Feldtheorie oder 2. Quantisierung bekannt. Es folgte 1934, nicht weniger spektakulär, die Anwendung dieses Gedankens auf die Erzeugung und Vernichtung von Elektronen und Neutrinos (Fermis "Versuch einer Theorie der β -Strahlen").² Der weitere Ausbau dieser viel versprechenden Vorstellungen stockte jedoch, denn die Rechnungen führten unweigerlich zu Absurditäten in Form unendlich großer Zwischenwerte (darin vergleichbar der Diracschen Unterwelt der Elektronen, s. Kap. 6.4.5). Deren Beseitigung war auch nach mehr als zehn Jahren intensiver Bemühungen nur ansatzweise gelungen. Doch als ab 1946 an der elektrostatischen und der magnetischen Wechselwirkung des Elektrons zwei kleine Anomalien gemessen wurden (s.u.) und nun erklärt werden mussten, lernte man, mit diesen Singularitäten umzugehen. So entstand als erste der Quanten-Feldtheorien die Quanten-Elektrodynamik (*QED*), die um 1950 vor allem von Richard Feynman vollendet wurde. Seine Bildersprache in Form der Feynman-Diagramme gehört heute zum physikalischen Allgemeinwissen.

Das vorliegende Kapitel soll von der Struktur dieser Theorie einen ersten Eindruck geben, notgedrungen einen oberflächlichen. Gleichzeitig bemüht sich die Darstellung, auch die spätere Ausweitung auf die Quanten-Feldtheorien³ der Starken und Schwachen Wechselwirkung verständlich werden zu lassen, die zusammen zu den tragenden Pfeilern des Standard-Modells wurden.

Das Standard-Modell geht zunächst davon aus, dass neben der Annahme der Unteilbarkeit auch die weiteren grundlegend neuartigen Eigenschaften der elementaren Teilchen, wie sie Schritt für Schritt und

¹Der Doppelspaltversuch wurde mit Licht Anfang des 19. Jahrhunderts durchgeführt, mit Elektronen im 20. Jahrhundert zunächst als Gedanken- und heute als wirkliches Experiment: Die Strahlung fällt durch zwei sehr enge und eng benachbarte Spalte auf einen Schirm. Während dieser durch jeden Spalt einzeln schwach, aber einigermaßen gleichmäßig bestrahlt wird, verursacht das Öffnen des benachbarten Spaltes Interferenz-Streifen, in denen sich vierfache Intensität und absolute Dunkelheit abwechseln. Vgl. [3, Bd. III], [5].

²Diese Anfänge der Quanten-Feldtheorie wurden in Kap. 6.4 und 6.5 schon angedeutet.

³Nach erfolgter Eingewöhnung wird ab dem folgenden Kapitel, wie allgemein üblich, *Quantenfeldtheorie* und *Quantenelektrodynamik* ohne Bindestrich geschrieben.

anhand einzelner Beispiele gefunden worden waren, allgemeine Gültigkeit haben:

1. Alle Elementarteilchen können erzeugt und vernichtet werden (vgl. Kap. 6.4.6, 6.5.2, 6.5.7).
2. Alle Elementarteilchen (des gleichen Typs) sind vollständig ununterscheidbar (vgl. Kap. 5.7.2 und 7.1.4).
3. Zu allen Teilchen gibt es Antiteilchen (vgl. Kap. 6.4.5, 6.5.9 und 10.2).

Als Essenz der Quanten-Feldtheorien kann man dann zusammenfassen:

1. Materie ist (wie Strahlung) eine Form der Manifestation von Wellen, allgemeiner: von "Feldern".
2. Diese Wellenfelder können im leeren Raum existieren und angeregt oder abgeschwächt werden.
3. Die Wellenfelder sind "quantisiert".

(Dieser Begriff hat wohl keine anschauliche Bedeutung, sondern meint die spezielle mathematische Methode der 2. Quantisierung: den Gebrauch von Operatoren statt Amplituden, wodurch Anregung und Abschwächung nur in diskreten Schritten geschehen können.)

4. Die einzelnen Feldquanten der Wellenfelder sind die Elementarteilchen –
5. womit deren Ununterscheidbarkeit eine einfache Deutung findet.
6. Prozesse zwischen Elementarteilchen (bei denen diese also neue Zustände einnehmen), beruhen ausschließlich darauf, dass die Teilchen selber die Wellenfelder anderer Teilchensorten anregen (oder abschwächen), also andere Elementarteilchen erzeugen und vernichten (oder eben emittieren und absorbieren) können.
7. Jede Wechselwirkung zwischen zwei Teilchen entsteht so, dass eins von ihnen ein drittes Teilchen emittiert, das von dem anderen absorbiert wird.

Denn durch dies Austauschteilchen wird Energie und Impuls übertragen, in der Sprechweise der klassischen Physik also eine Kraft ausgeübt.

Im Fall der Quanten-Elektrodynamik ist das Austauschteilchen das Photon. Damit auf diesem Weg aber alle elektrodynamischen Kräfte herauskommen, auch z.B. das elektrostatische Coulomb-Potential, muss man dem Photon neue Freiheiten geben. Allgemein:

8. Die ausgetauschten Teilchen müssen sog. "virtuelle Zustände" einnehmen können, in denen die nach der Relativitätstheorie zwingende Beziehung $E^2 = p^2c^2 + (mc^2)^2$ zwischen Energie, Impuls und (Ruhe-)Masse aufgehoben ist.

Da diese Verletzung aber nur bei Zwischenschritten der Berechnungen auftaucht, nie im messbaren Endergebnis, kann man diese virtuellen Zustände, ohne zur beobachtbaren Realität in Widerspruch zu geraten, als prinzipiell unbeobachtbar deklarieren.

Durch sorgfältige Definition der genauen Eigenschaften und Rechenverfahren ließ sich tatsächlich erreichen, dass auf diese Weise alle bekannten Teilchen und (mit Ausnahme der Gravitation) alle bekannten Wechselwirkungen und Effekte herauskommen. In der Quanten-Elektrodynamik sogar mit einer Genauigkeit, die in der Physik vorher nie erreicht worden war.

Indes sind nicht nur Teilchen in virtuellen Zuständen schwer zu veranschaulichen, zumal wenn sie gerade dabei sind, selber weitere virtuelle oder auch reelle Teilchen zu emittieren oder zu absorbieren. Noch problematischer erschienen (und erscheinen) vielleicht zwei Folgerungen aus dieser Erweiterung denkbarer Vorgänge, die aber im Rahmen des Formalismus unabweisbar sind:

9. Ein Teilchen muss die von ihm erzeugten virtuellen Feldquanten auch selber wieder absorbieren können (Stichworte: Selbstenergie, Vakuum-Polarisation, Strahlungskorrektur). Jedes Teilchen erscheint daher wie mit einer Wolke von Teilchen *aller* anderen möglichen Arten umgeben, ist dann zeitweise ebenfalls in einem virtuellen Zustand. Somit reagiert es anders auf äußere Felder (Stichworte: Renormierung von Massen und Ladungen).
10. Selbst dem Vakuum muss die Fähigkeit zugesprochen werden, spontan Teilchen in virtuellen Zuständen hervorzubringen (Stichwort: Vakuum-Fluktuationen).

Als Nebenergebnis dieser Entwicklung gibt es nun überhaupt kein physikalisches Problem mehr, das sich in geschlossener Form und exakt lösen lässt. Alles, was man berechnen kann, sind Näherungswerte für Energie-Niveaus und Übergangsraten⁴ (incl. Wirkungsquerschnitte), die schrittweise auf einander aufbauen und sich (im Erfolgsfall) der Realität immer besser anpassen. Der Grund liegt in der unbeschränkten Möglichkeit, ein virtuelles Teilchen nach dem anderen zu erzeugen und mitwirken zu lassen, wobei diese selber auch weitere reelle oder virtuelle Teilchen hervorbringen können. Selbst der Zustand ohne jedes reelle Teilchen, also das absolute Vakuum, ist in der Quanten-Feldtheorie kein stabiler Zustand mehr, denn er ist kein Eigenzustand zu dem Hamiltonoperator, der (unter anderem) einzelne Erzeugungsoperatoren enthält.

Es sei wiederholt: diese imaginierten Vorgänge sind Veranschaulichungen von *Zwischenschritten*, die zunächst den Theoretikern bei der quantenelektrodynamischen Berechnung messbarer Größen auffielen. Sie führten übrigens regelmäßig zu den erwähnten unendlich großen, also sinnlosen Zwischen-Ergebnissen und verwehrten damit der Quanten-Elektrodynamik lange Zeit die Anerkennung. Jedoch zeigten sich in den 1940er Jahren in neuen Experimenten (z.T. erst möglich geworden durch die im 2. Weltkrieg für Funk und Radar entwickelte Mikrowellen-Technik) zwei winzige Abweichungen vom bisherigen Bild der elektromagnetischen Wechselwirkung, die innerhalb kürzester Zeit mit Hilfe dieser problematischen Vorstellungen – und *nur* mit ihnen – quantitativ erklärt werden konnten:

- Am magnetischen Moment des Elektrons wurde 1946 überraschend eine Abweichung um 1.1‰ vom Wert $g = 2$ der Dirac-Theorie (s. Kap. 10.2) entdeckt. Sie konnte sogleich richtig aus der Strahlungskorrektur errechnet werden. Seither ist in einem ständigen Wettlauf zwischen Theorie und Experiment die Genauigkeit von 3 auf 12 Dezimalstellen gesteigert worden – übereinstimmend.
- Zugleich wurde zwischen den Niveaus $2s_{1/2}$ und $2p_{1/2}$ des H-Atoms eine winzige Aufspaltung gefunden, die *Lamb-Shift* von etwa 10^{-6} der Bindungsenergie. Hier brauchte es zwei Jahre, bis die Theorie so weit war, dies richtig zu berechnen.

Ob sich so genaue Ergebnisse einst auch in Bildern und Begriffen erreichen lassen werden, die mit der Anschauung leichter zu versöhnen sind, ist nicht bekannt. Vorläufig kann vielleicht die Unschärfe-Relation (s. Kap. 6.1.2, Gl. 6.12) aushelfen: Einer möglichen Sichtweise zufolge sind Verletzungen der Energieerhaltung ja “virtuell erlaubt”, aber eben nur für so kurze Zeiten, dass sie nicht beobachtbar sind. (Es sei denn, man sieht z.B. die erwähnte Übereinstimmung bis zur 12. Dezimalstelle als eine Beobachtung an, die diese Vorstellung legitimiert.) – Zum ehemals prinzipiell erschienenen Unterschied zwischen (Wellen-) Strahlung und Materie aber ist festzustellen, dass er nur auf der Oberfläche existiert hat.

9.1 Welle-Teilchen-Dualismus

Bis Ende des 19. Jahrhunderts bildeten *Welle*⁵ und *Materie* noch ein Paar unverwechselbar verschiedener Begriffe; und mit dem Alltagsverstand betrachtet und umgangssprachlich ausgedrückt, gilt das auch noch heute. Wellen waren nicht denkbar ohne die Materie, in der sie als einer der möglichen Bewegungszustände

⁴Beides sind messbare Größen. Der gute Vorsatz, sich bei der Beschreibung möglichst auf die *messbaren* Größen zu beschränken (statt z.B. auf *Ort* und *Impuls* des gebundenen Elektrons auf seiner *Bahn*), hatte 1925 schon Heisenberg geholfen, die richtige Formulierung der Quantenmechanik zu finden (unbeschadet der Tatsache, dass es ohne einen beliebigen komplexen Phasenfaktor an jedem Zustand doch nicht ging).

⁵Häufig wird für fortschreitende Wellen auch der Begriff (*reine*) *Strahlung* gewählt, unbeschadet der Existenz von durchaus materiellen Wasser-, Sand- oder α -Strahlen.

existieren und sich ausbreiten. So wurde auch für die elektromagnetischen Wellen über die Eigenschaften einer geeigneten Träger-Substanz geforscht, bis dieser "Licht-Äther" durch Einsteins Relativitätstheorie als ein – schonungslos ausgedrückt – gegenstandsloses Produkt der physikalischen Vorstellungskraft entlarvt wurde. Den Licht-Wellen genügt demnach schon das Vakuum, um darin zu existieren und Energie, Impuls und Drehimpuls zu transportieren.⁶

Dass in dieser vermeintlich reinsten Form von Wellen aber auch charakteristische Eigenschaften von Teilchen entdeckt wurden, angefangen vom Energiequant (Planck 1900, Einstein 1905, 1909 und 1917) bis zur Fähigkeit zu elastischen Stößen mit "richtigen" Teilchen (Compton 1923), erschien als ein großer, unerklärbarer Gegensatz: Ein Phänomen mit räumlicher Ausdehnung, das dennoch nur als ganzes und nur punktförmig wirkt, die erste Feststellung des *Welle-Teilchen-Dualismus*.

Erst danach, aber noch mitten in den nicht enden wollenden Schwierigkeiten des Bohrschen Atommodells, wenn es mehr als nur ein Elektron im Atom behandeln sollte, wurde auch der umgekehrte Gedanke als Hypothese ins Spiel gebracht: Der Bewegung eines Teilchens könne man widerspruchsfrei auch eine Welle zuordnen, fand Louis de Broglie 1923 heraus (Nobelpreis 1929), denn die Bewegungs-Gleichungen für Massenpunkte (in der Form der Hamiltonschen Mechanik von 1833) gelten genau so gut auch für Wellen. Am Beispiel des Übergangs von der Wellen- zur Strahlen-Optik kann man sich klar machen, warum (bzw. unter welchen Bedingungen) die beiden unterschiedlichen Begriffsbildungen experimentell ununterscheidbar sein können: Auch Licht verhält sich wie ein Teilchenstrahl, solange Interferenzerscheinungen näherungsweise vernachlässigt werden können: im Gebiet der geometrischen Optik.⁷

Die populärste Manifestation des Welle-Teilchen-Dualismus ist wohl das Paradox des Doppelspalt-Experiments¹. Gleich, von welchem Ausgangspunkt her gefragt wird:

- Entweder: wie kann ein unteilbarer Körper auf zwei getrennten Wegen (durch die beiden Spalte) gleichzeitig von A nach B gekommen sein?
- Oder: wie kann eine ausgedehnte Welle auf Materie (am Schirm) räumlich so konzentriert einwirken wie ein einziges punktförmiges Teilchen?

– anschaulich verstehen lässt sich das nicht. Doch der Welle-Teilchen-Dualismus fordert die Anschauung noch durch weitere Gegensätze heraus:

⁶Dass Wellen im Vakuum existieren können, ist auch eine entscheidende begriffliche Voraussetzung für die Einführung der Materie-Wellen (de Broglie 1923, Schrödinger 1925, und die ganze Quanten-Feldtheorie).

⁷Andernfalls hätte Newtons Korpuskulartheorie des Lichts (1675) ja nicht erst durch die Interferenzversuche von Thomas Young (1802) widerlegt zu werden brauchen.

typische materielle Körper ...	typische Wellen ...
können nur mit (Ruhe-)Masse $m > 0$ gedacht werden (transportieren Energie und Impuls proportional zu m);	<i>haben anschaulich gedacht gar keine Masse (können aber Energie und Impuls transportieren);</i>
können als Massenpunkte gedacht werden;	<i>müssen räumliche Ausdehnung zeigen;</i>
können weder entstehen noch vergehen;	<i>lassen sich leicht dabei beobachten, wie sie entstehen und vergehen ...</i>
haben diskrete, atomistische Struktur;	<i>... und zwar auf kontinuierliche Weise;</i>
können nicht den selben Raum einnehmen ...	<i>können sich überlagern (Superposition) ...</i>
... und können daher erst recht nicht miteinander interferieren;	<i>... und interferieren dann zwangsläufig (Addition der Amplituden);</i>
lassen sich daher im Prinzip immer einzeln wiedererkennen (selbst wenn es völlig gleiche Teilchen sind, denn sie bewegen sich auf lückenlosen individuellen Trajektorien und sind nie zugleich am selben Ort).	<i>haben im Allgemeinen keine wiedererkennbaren Teile (z.B. kann die zu einem Interferenzmaximum transportierte Energie (Betragsquadrat der Gesamt-Amplitude) nicht entlang von Trajektorien zu den Quellen zurück verfolgt werden, ebensowenig wie deren Auslöschung in einem Minimum).</i>

Gegen den Welle-Teilchen-Dualismus spricht daher einfach der Alltagsverstand, und zwar allen Versuchen zum Trotz, ihm durch Begriffe wie “Komplementarität” (Bohr 1927) oder die Wahrscheinlichkeitsdeutung der Wellenmechanik (Max Born 1927, Nobelpreis 1954) beizukommen.

9.2 Das Photon: Ein Teilchen, das erzeugt und vernichtet werden kann

9.2.1 Vom Wellenquant zum Teilchen

Als erstes Anzeichen des kommenden Welle-Teilchen-Dualismus wurde bekanntlich die “Körnigkeit” der Lichtwellen entdeckt. 1900: Plancks Formel für die Wärmestrahlung (also auch alles gewöhnliche Licht) mit der Quantenbedingung $E = h\nu$; 1905: Einsteins Deutung des photoelektrischen Effekts (Nobelpreis 1921) mittels seiner Gleichung $h\nu = E_{\text{kin}} + \text{Austrittsarbeit}$. Es dauerte dann noch bis 1926, dass Dirac die Formeln für die Quantisierung des elektromagnetischen Felds fand und die Photonen nun als dessen Feldquanten identifiziert werden konnten. Wesentliche Zwischenschritte waren:

Die statistischen Schwankungen des Lichts (Einstein 1909). Statistisches Fluktuieren in einem Phänomen verrät viel über die Bestandteile des Systems, auch wenn diese selber durch ihre Kleinheit unsichtbar sind. Für Fluktuationen gilt bei inkohärent zusammengesetzten Wellenfeldern (z.B. Lärm, rauer Seegang) eine andere Formel als bei umher fliegenden Teilchen⁸. Tatsächlich konnte Einstein 1909 schon aus der Planckschen Formel allein die Größe solcher Schwankungen berechnen. Ergebnis: Beim Licht *addieren* sich die Fluktuationen mit Wellencharakter zu denen mit Teilchencharakter. Einstein schreibt, jetzt sei eine Theorie nötig, die die Maxwellsche Wellentheorie mit der Newtonschen Korpuskulartheorie des Lichts verbinde. Dies ist der erste vollständige Ausdruck des Welle-Teilchen-Dualismus (dessen oben angedeutete Lösungsansätze Einstein übrigens nie akzeptieren mochte⁹).

Quanten-Modell für Emission und Absorption von Photonen (Einstein 1917). Das Spektrum von Strahlung im thermodynamischen Gleichgewicht – am Ende der Klassischen Physik als *das* theoretische Problem

⁸Für ein Beispiel zur Fluktuation nach Teilchenart s. Kap. 6.1.5 - Poisson-Statistik.

⁹Zugespitzt z.B. in seinem berühmten “Einstein-Podolsky-Rosen-Paradoxon” (EPR).

schlechthin angesehen, und mit der berühmten Planckschen Formel von 1900 mehr parametrisiert als physikalisch erklärt – ist mit einem gequantelten Strahlungsfeld (einem “Photonen-Gas”) überraschend leicht zu deuten. Es musste nur jemand einmal darauf kommen. In einem seiner ebenso berühmten wie lehrreichen Geniestreiche diskutiert Einstein das Plancksche Strahlungsgesetz in einer Welt, in der man nur von Oszillatoren und Lichtquanten spricht, nicht von Wellen (s. Kasten 9.1)¹⁰. Nebenbei bringt er hier wesentliches über die vorher vollkommen rätselhaften “Quantensprünge” bei Emissions- und Absorptionsprozessen in Erfahrung.

Noch im selben Jahr 1917 analysierte Einstein in seinem Modellsystem (durch eine recht komplizierte Berechnung von statistischen Schwankungen) die Impulsbilanz. Vereinfacht zusammengefasst: Bei jeder Absorption überträgt ein Photon einen bestimmten Impuls \vec{p} bekannter Richtung ans Atom. Im Mittel summieren sich alle übertragenen Photonen-Impulse natürlich zu Null, das Prinzip des detaillierten Gleichgewichts verlangt aber eine ausgeglichene Bilanz nicht nur für jede Frequenz, sondern auch für jede Impulsrichtung einzeln. Daher muss das emittierende Atom schon bei der Emission einen gleich großen Rückstoß ($-\vec{p}$) erhalten haben. Photonen müssen folglich schon bei der Emission den Impuls haben, den sie bei der Absorption abgeben. Einstein wörtlich: “Ausstrahlung in Kugelwellen gibt es nicht”. Für den Betrag ergibt sich übrigens ganz unabhängig, dass er die schon aus den Maxwellschen Gleichungen für Wellenfelder abzuleitende Gleichung $|\vec{p}| = E/c$ erfüllen muss¹¹.

Einstein bekam seinen Nobelpreis erst 1921, und zwar für “alle seine bisherigen Leistungen”, aber insbesondere für seine 1905 gefundene Anwendung der Lichtquanten-Hypothese auf den Photo-Effekt an Metallen. Völlig unerwähnt blieb dabei, was er weiter bahnbrechendes geleistet hatte in der Fundierung des Photons als eines **Teilchens**, wenn auch eines mit befremdlichen Eigenschaften: Es hat keine Masse, befolgt die Energie-Impuls-Beziehung für die Maxwellschen Wellen, kann entstehen und verschwinden – im Vakuum.

Photon-Elektron-Stöße (Compton 1923). Die breitere Anerkennung des Photons als Teilchen ließ denn auch weiter auf sich warten, bis Beobachtungen an einzelnen Photonen die nötige Überzeugungskraft entwickelten: Die mit einem Energieverlust verbundene Streuung von Röntgenstrahlung, von A.H. Compton 1923 beobachtet und als elastischer Stoß des Photons mit einem Elektron interpretiert (näheres s. Kap. 6.4.3). Niels Bohr war einer der letzten Gegner dieser Auffassung. Er versuchte sich an Theorien mit nur statistischer Erhaltung von Energie und Impuls bei Quantenprozessen, bis Compton 1925 *ein kinematisch vollständiges Experiment* veröffentlichen konnte, d.h. koinzidente Messung der Winkel des gestreuten Photons und des gestoßenen Elektrons bei einzelnen Stößen in der Nebelkammer (Nobelpreis 1927).

¹⁰Anmerkungen zu Kasten 9.1:

- Setzt Einsteins Gedankengang nicht doch Wellenvorstellungen voraus – siehe die Frequenz ν in den Formeln? – Nein, man könnte auf ν hier völlig verzichten, indem man es *überall* durch E/h ersetzt, also durch die Größe der Energiepakete ausdrückt. Die Energiedichte $u(\nu) d\nu$ des Strahlungsfelds hat dann die einfache kinematische Bedeutung einer Teilchendichte: *durchschnittliche* Anzahl Photonen (pro cm^3) mit Energie im Intervall $dE = h d\nu$, multipliziert mit der Energie $E = h\nu$ eines jeden.
- Die hier auftauchende induzierte Emission gilt als eine der großen Entdeckungen Einsteins. Für Reaktionen zwischen Teilchen ist sie wirklich überraschend, nicht aber für eine Welle, die mit periodisch oszillierender Kraft auf einen schwingenden Oszillator gleicher Frequenz einwirkt. Seine Schwingungsenergie wird sich – je nach der Phasenlage der Welle bzw. Kraft – erhöhen (\sim Absorption) oder *erniedrigen* (\sim *induzierte Emission*). Das sieht man schon an jeder Kinderschaukel, wenn man sie durch periodisches, synchronisiertes Eingreifen (von außen) je nach Phasenlage entweder höher anregt oder abbremst. Außer dem Hinweis auf diesen Vorgang brauchte Einstein 1917 daher überhaupt kein weiteres Argument, um diesen Teil seines neuartigen Ansatzes zu verteidigen, denn obwohl er wesentliches zum Teilchencharakter der Strahlung herausfand, hatte er den Energieaustausch noch ganz in Wellenbegriffen beschrieben.
- Induzierte Emission ist der grundlegende Prozess der Lichtverstärkung im LASER (Theodore Maiman, 1960, aus unerforschlichen Gründen nicht mit dem Nobelpreis gewürdigt). Dabei ist ganz wesentlich, dass die Quanten kohärent und parallel emittiert werden, wovon allerdings 1917 bei Einstein (noch) nichts steht. Deshalb erscheint es auch etwas weit her geholt, ihn mit dieser Arbeit als theoretischen Erzvater des Lasers zu feiern.

¹¹Das ist eine ernste Prüfung der Konsistenz beider Denkweisen. – Eine Anwendung in der modernen Experimentalphysik: LASER-Kühlung von Atomen im Temperaturbereich \sim mK (???)

Kasten 9.1: Quanten-Modell für Emission und Absorption von Photonen (Einstein 1917)

Einstein baut sich ein *parametrisches* Modell (wie das Tröpfchenmodell der Bindungsenergie eines ist), um das thermodynamische Gleichgewicht zwischen Materie und Strahlung zu untersuchen. Sein System besteht aus

- Oszillatoren (Atome, Moleküle, ...):
 - teils im Grundzustand (Anzahl N_1),
 - teils im angeregten Zustand (Anzahl N_2 , feste Anregungsenergie ΔE),
- und einem Strahlungsfeld:
 - $u(\nu) d\nu$ ist die (mittlere) räumliche Energiedichte im Frequenzintervall $d\nu$.

Für die Teilsysteme bei der Temperatur T gilt einzeln:

$$\begin{aligned} \text{1. Boltzmann-Faktor: } \quad \frac{N_2}{N_1} &= e^{-\frac{\Delta E}{kT}} \\ \text{2. Plancks Strahlungsgesetz: } \quad u(\nu) &= \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} \end{aligned}$$

Beides gilt auch im thermodynamischen Kontakt, wenn die Systeme durch Energieaustausch verbunden sind. Mögliche Prozesse sind die Quantensprünge der Oszillatoren bzw. Erzeugung und Vernichtung von Strahlungsenergie, die verknüpft werden durch die

$$\text{3. Quantenbedingung: } \quad \Delta E = h\nu .$$

An Prozessen setzt Einstein zunächst an:

$$\begin{aligned} \text{spontane Emission: } \quad dN_2 &= -A N_2 dt && \text{(Rate unabhängig vom Strahlungsfeld)} \\ \text{(induzierte) Absorption: } \quad dN_2 &= +B u(\nu) N_1 dt && \text{(Rate proportional zum Strahlungsfeld)} \end{aligned}$$

Die zwei Modell-Parameter A , B werden seitdem “**Einstein-Koeffizienten**” genannt. Erstmals modelliert Einstein hier die *spontane* Emission von Strahlungsquanten, natürlich unabhängig von der Existenz und Stärke des Strahlungsfelds. Dabei beruft er sich ausdrücklich auf Rutherford und nimmt damit an, das Licht entstehe so, wie jener sich nach der Entdeckung des exponentiellen Zerfalls 1900 die spontane Emission der Quanten der Radioaktivität denken musste: zufällig.

Im Gleichgewicht müssen sich alle Prozesse ausbalancieren, und zwar für jede Frequenz einzeln:

$$\text{4. Prinzip des detaillierten Gleichgewichts: } \quad \Sigma(dN_2) = 0 .$$

Wenn es nur die beiden schon genannten Prozesse gäbe, müsste also $AN_2 = Bu(\nu)N_1$ sein und damit $u(\nu) = \frac{A}{B} \frac{N_2}{N_1} = \frac{A}{B} e^{-\frac{h\nu}{kT}}$. Das kann mit dem Planckschen Gesetz nur im Grenzfall $h\nu \gg kT$ übereinstimmen, und auch nur dann, wenn die Parameter so gewählt werden, dass

$$\frac{A}{B} = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} .$$

Doch durch einen dritten Prozess kann das Modell mit allen Bedingungen kompatibel gemacht werden. Man findet ihn, wenn man alles in die Gleichung $\Sigma(dN_2) = 0$ einsetzt. So entdeckt Einstein die

$$\text{induzierte Emission: } \quad dN_2 = -B u(\nu) N_2 dt .$$

(*Emission*, weil $dN_2 < 0$, *induziert*, weil die Rate $dN_2/dt \propto u(\nu)$.)

9.2.2 Vom Teilchen zum Feldquant

Harmonischer Oszillator. Heisenberg erfand 1925 die Quantenmechanik in Matrizen-Form am Beispiel des harmonischen Oszillators, indem er dessen äquidistante Energieniveaus, die ja schon bei Planck am Beginn aller Quantenphysik gestanden hatten, nun erstmalig von einer anderen Grundlage aus *herleiten konnte*.¹² Erster Anwendungsfall der Matrizenmechanik aussehen können wie die eines harmonischen Oszillators.

Kurze Begründung: Die Gesamtenergie des Felds ist die Summe von zwei quadrierten Größen \vec{E} und \vec{B} , die außerdem wechselseitig und mit verschiedenem Vorzeichen die Zeitableitung voneinander sind – ganz wie Ort und Impuls eines Massenpunkts, wenn eine rücktreibende Kraft linear mit der Auslenkung ansteigt.

Der Erfolg war umwerfend: Die Fluktuationen, die Einstein 1909 für das Strahlungsfeld aus der Planckschen Formel abgeleitet hatte und die sowohl Teilchen- als auch Welleneigenschaften zeigten, kamen automatisch richtig heraus. Folgerichtig wurde das n -te Energieniveau $|n\rangle$ dieses Oszillators jetzt als Zustand mit n Photonen angesehen, und der Zustand mit $n=0$ als Vakuum. Wegen der Ununterscheidbarkeit der einzelnen Photonen folgte dann mit der üblichen thermodynamischen Statistik auch schon das ganze Plancksche Strahlungsgesetz.

“Zweite Quantisierung”. Die Quantenmechanik des Harmonischen Oszillators, die hier schon in Kap. 7.6.2 vorgestellt wurde (s. Kasten 7.5), ist grundlegend für die ganze Quanten-Feldtheorie. Die nützlichen Auf- und Absteige-Operatoren \hat{c}^\dagger und \hat{c} , mit denen man ein Energieniveau $|n\rangle$ in das nächst höhere bzw. niedrigere (sofern nicht $n=0$) umwandeln kann, werden dann hier zu Erzeugungs- bzw. Vernichtungs-Operatoren eines Photons. Der Operator

$$\hat{n} = \hat{c}^\dagger \hat{c} \quad (9.1)$$

entpuppt sich als der Anzahl-Operator, denn er hat im Zustand mit n Photonen den Eigenwert n . Die Teilchen-Zahl wurde so zu einer Observablen mit diskreten Eigenwerten, daher entstand für diese Darstellungsweise der (nicht ganz glücklich gewählte) Name “Zweite Quantisierung”.

Diracs Quanten-Elektrodynamik. Dirac arbeitete bis 1927 die Quantisierung des vollständigen elektromagnetischen Felds aus (alle Frequenzen ω von Null bis unendlich, alle Richtungen der Wellenvektoren \vec{k} ($\omega = |\vec{k}|c$), beide Polarisierungen $\sigma = \pm 1$) – der Beginn der Quanten-Feldtheorie. Die Energie des freien Maxwell-Felds ist dann durch einen Hamilton-Operator auszudrücken (mit Summe – besser Integral – über die vollständige Basis aller möglichen Zustände eines Photons), der in Erinnerung an “Strahlung” (*radiation*) oft \hat{H}_{rad} genannt wird:

$$\hat{H}_{rad} = \sum_{k\sigma} \left(\hat{n}_{k\sigma} + \frac{1}{2} \right) \hbar\omega \quad (9.2)$$

Tatsächlich blieb Dirac nicht bei dem “ungestörten” Hamilton-Operator des Atoms stehen (d.i. \hat{H}_{rad} für das freie Maxwell-Feld plus dem Hamilton-Operator für ein Elektron im Coulomb-Potential). Er ging gleich noch einen großen Schritt weiter und fügte einen “Stör-Operator” an, worin \hat{c}^\dagger und \hat{c} nicht in der Kombination des Photonenzählers $\hat{n}_{k\sigma} = \hat{c}_{k\sigma}^\dagger \hat{c}_{k\sigma}$ auftauchen, sondern einzeln, aber mit den Elektronenkoordinaten multipliziert (“gekoppelt”). Solche Terme im Hamilton-Operator bedeuten **Erzeugung oder Vernichtung eines Photons im Zusammenhang mit der Zustands-Änderung eines Elektrons**. Diracs Erfolg: die theoretische Beschreibung des “Quantensprungs”. Wir kommen in Kap. 9.4.2 darauf zurück, aber dann gleich in modernerer Ausdrucksweise, nachdem auch die Elektronen zu Feldquanten geworden sind.

¹²Außer dem harmonischen Oszillator (und den ebenen Wellen für freie Teilchen) gibt es wohl nur noch ein einziges weiteres exakt lösbares Problem in der Quantenmechanik: das Wasserstoff-Spektrum, von Schrödinger zur ersten Demonstration seiner Wellenmechanik gewählt.

9.3 Das Elektron (und andere Elementarteilchen): Erste Merksätze

Aus den bisher dargestellten Befunden lassen sich schon einige allgemeine Eigenschaften der Elementarteilchen ablesen, von denen wir bis heute keine Ausnahme kennen:

9.3.1 Alle Elementarteilchen können erzeugt und vernichtet werden.

Das gilt nicht nur für die Quanten der “Strahlung”, also z.B. (masselose) Photonen mit ihren altbekannten Prozessen der Emission und Absorption, sondern auch für “richtige Teilchen mit Masse”. Am Beispiel der Elektronen, Positronen und (Anti-)Neutrinos wurde in Kap. 6.4, 6.5 gezeigt, wie man zu dieser Erkenntnis gekommen ist.

9.3.2 Zu Teilchen gibt es Antiteilchen.

Zu jedem Typ Fermion gibt es ein Antiteilchen. Erstes Beispiel war wieder das Paar Elektron/Positron. Teilchen und Antiteilchen haben die gleiche Masse, aber entgegengesetzte Ladungen. Sie erfahren daher alle Wechselwirkungen in gleicher Stärke, aber mit umgekehrtem Vorzeichen (ob einschließlich der Gravitation ist bis heute ungeklärt!).

Ein Teilchen und sein Antiteilchen können sich gemeinsam “vernichten”. Übrig bleibt dann nur, was durch die Erhaltung von Energie, Impuls und Drehimpuls diktiert wird – und zwar, wie denn sonst, in Gestalt irgendwelcher anderer Elementarteilchen: Häufig z.B. als Photonen (also Ruhemasse Null) oder andere Bosonen. Aber auch Paare Teilchen/Antiteilchen aller anderen Teilchenarten sind möglich, soweit die Energie zu der Erzeugung ihrer Ruhemassen ausreicht.

Gleichzeitig gilt ein absoluter Erhaltungssatz: Die Zahl der Fermionen (Teilchen positiv, Antiteilchen negativ gezählt) bleibt konstant. Wo also ein Fermion erzeugt wird, muss entweder eins vernichtet oder ein Antifermion erzeugt werden. Genau so gibt es Antiteilchen zu den Bosonen. Hier spielt dieser Begriff aber eine vergleichsweise geringe Rolle, denn Bosonen können auch ohne ihre Antiteilchen erzeugt und vernichtet werden (Beispiel: Emission und Absorption einzelner Photonen).¹³

9.3.3 Elementarteilchen der gleichen Sorte sind vollständig ununterscheidbar.

Identische Wellenquanten. Bei Photonen wurde die Ununterscheidbarkeit schon in der Einleitung zu diesem Kapitel begründet: Wie sollte man denn in einem elektromagnetischen Strahlungsfeld aus E - und B -Feldern die Lichtquanten einzeln benennen und unterscheiden können. Schon der Versuch, ihnen gedanklich Namen oder Nummern zu geben, scheint abwegig. Die Beschreibung des elektromagnetischen Felds in der Zweiten Quantisierung¹⁴ kommt denn auch vollkommen ohne Nummerierung der Photonen oder ihrer Koordinaten aus. Dass daraus die Gültigkeit des Planckschen Strahlungsgesetzes (Bose-Einstein-Statistik) für Photonen folgt (s. Kap. 9.2.2) war sofort als weiterer Pluspunkt dieser neuen Theorie-Entwicklung vermerkt worden.

Identische Körperchen. Wenn aber mehrere “echte” Teilchen (gemeint ist mit Masse $m > 0$) zugegen sind, ist die Anschauung immer wieder versucht, jedes individuell zu benennen und sein Schicksal zu verfolgen. Das ist jedoch falsch und in der Elementarteilchenphysik sogar verboten. Dies klassisch unverständliche Verbot war uns zuerst bei der Streuung von zwei α -Teilchen aneinander begegnet (Kap. 5.7). Dort zeigt die Messung in direkter Weise, dass die Amplituden von Target- und Projektil-Teilchen miteinander interferieren – von der vollkommenen gegenseitigen Auslöschung der einzelnen Intensitäten bis zu ihrer Verstärkung auf das Vierfache. Die Fähigkeit zur Interferenz erfordert für die 2-Teilchen-Wellenfunktion $\Psi(\text{Koordinatensatz}_1, \text{Koordinatensatz}_2)$ eine Form, in der der Zustand jedes der beiden Teilchen sich in jedem der beiden Koordinaten-Sätze niederschlägt, mithin keine Zuordnung der Nummern 1 bzw. 2 zu Projektil bzw. Target mehr möglich ist.

¹³Mehr zu Antiteilchen in Kap. 9.7.6 und 10.2.6/6.

¹⁴S. folgenden Abschnitt 9.4.

Normalerweise, und das bleibt für unterschiedliche Teilchen richtig, hätte man für die Wellenfunktion das Produkt $\Psi(1, 2) = \psi(1) \varphi(2)$ anzusetzen, wenn man in einem 2-Teilchen-System ein Teilchen (z.B. das Projektil) im Zustand ψ und das andere (z.B. Target) im Zustand φ präpariert hat. Darin gehört der Koordinatensatz "1" zum Zustand ψ und macht die zeitliche Entwicklung des ersten Teilchens mit, und der Koordinatensatz "2" in der Funktion φ ebenso für Teilchen 2.

Formalismus. In den Formalismus der Quantenmechanik können diese neuen Beobachtungen sämtlich durch eine einzige einfache Symmetrie-Regel eingebaut werden: Die Mehrteilchenwellenfunktion muss bei Vertauschung von zwei Teilchen (d.h. von zwei vollständigen Koordinatensätzen), wenn es sich um identische Teilchen handelt,

- entweder gleich bleiben (symmetrisch sein) – so bei Bosonen,
- oder ihr Vorzeichen wechseln (antisymmetrisch sein) – so bei Fermionen.

Andere Funktionen $\Psi(\text{Koordinatensatz}_1, \text{Koordinatensatz}_2)$ kann man zwar hinschreiben, sie kommen in der Wirklichkeit aber schlicht nicht vor. Hat man zwei identische Teilchen zu betrachten, die einzeln in Zuständen ψ und φ präpariert wurden, dann entsteht die richtige Wellenfunktion je nach Teilchentyp entweder durch Symmetrisierung oder durch Anti-Symmetrisierung¹⁵:

$$\Psi^{s,a}(1, 2) = \frac{1}{\sqrt{2}} [\psi(1) \varphi(2) \pm \psi(2) \varphi(1)] \quad (9.3)$$

In Kap. 7.1.5 ist bereits diskutiert worden, dass Wellenfunktionen dieser *verschränkten* Form für die beiden identischen Kerne eines 2-atomigen Moleküls große Konsequenzen hinsichtlich des Spektrums der Rotationszustände und sogar der (makroskopischen) spezifischen Wärme haben.

Ausschlussprinzip. Aus Gl. 9.3 folgt für zwei gleiche Fermionen sofort, dass sie nicht denselben 1-Teilchen-Zustand besetzen können (denn $\Psi(1, 2) \equiv 0$ wenn $\varphi = \psi$). Eine anschauliche räumliche Folge ist:

Frage 9.1 *Zwei Elektronen mit parallelem Spin gehen sich im Raum automatisch von allein aus dem Weg, ohne dass irgendwelche Kräfte wirken müssten?*

Antwort 9.1 *Zwei Elektronen besetzen immer einen antisymmetrischen Zustand (Gl. 9.3). Bei parallelem Spin haben sie einen symmetrischen Spinzustand, sie müssen also eine antisymmetrisch verschränkte Ortswellenfunktion haben:*

$\Psi^a(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} [\psi(\vec{r}_1) \varphi(\vec{r}_2) - \psi(\vec{r}_2) \varphi(\vec{r}_1)]$. Die Aufenthaltswahrscheinlichkeitsdichte für beide Teilchen am selben Ort $\vec{r}_1 = \vec{r}_2$ ist daher immer $|\Psi^a(\vec{r}_1, \vec{r}_2)|^2 = 0$. Das würde auch richtig bleiben, wenn eine anziehende Kraft wirkte.

Diese formale Erklärung nach der Quantenmechanik hat wohlgerne gar nichts mit einer besonderen Abstoßungskraft zu tun, sondern beruht auf der antisymmetrischen Struktur der Mehr-Teilchen-Wellenfunktion. Es ist in diesen Formeln schlicht unmöglich, sich mehr als ein Elektron in einem Zustand überhaupt nur *vorzustellen* (sozusagen ein "Tabu").

¹⁵Oberer Index an $\Psi^{s,a}$ für symmetrisch/antisymmetrisch. Statt "Koordinatensatz" ist nur noch der Index 1 bzw. 2 geschrieben. Der Faktor $1/\sqrt{2}$ sorgt für die richtige Normierung $\langle \Psi | \Psi \rangle = 1$, wenn ψ und φ orthogonale 1-Teilchen-Zustände sind.

Ein “bisschen” Ausschließung? Das wird besonders deutlich, wenn man sich fragt, “wie verschieden” zwei 1-Teilchen-Zustände denn mindestens sein müssen, damit man zwei Elektronen darin unterbringen darf, und was für 2-Elektronen-Zustände dabei herauskommen können. Zum Test nehmen wir zwei orthogonale Funktionen ψ , φ an und setzen ein Elektron in den Zustand ψ , das andere aber in eine (schon richtig normierte) Linearkombination

$$\phi = \sqrt{1 - \beta^2} \psi + \beta \varphi .$$

Für $\beta = 1$ ist die Testfunktion ϕ orthogonal zu ψ . Mit abnehmendem $\beta = 1 \rightarrow 0$ können wir beide allmählich immer ähnlicher werden lassen. Die richtige 2-Teilchen-Wellenfunktion dazu erhält man immer aus der antisymmetrischen Verschränkung

$$\widetilde{\Psi}^a(1, 2) = \psi(1)\phi(2) - \psi(2)\phi(1) \equiv \beta[\psi(1)\varphi(2) - \psi(2)\varphi(1)] .$$

Für $\beta = 0$ ist das Ergebnis Null, dem Pauli-Prinzip entsprechend. Andernfalls wird die Wellenfunktion durch Multiplikation mit $1/(\beta\sqrt{2})$ normiert. Dabei entsteht gerade die Wellenfunktion $\Psi^a(1, 2)$ von Gl. (9.3) – und bezeichnet für jeden Wert von $\beta \neq 0$ jedesmal denselben 2-Elektronen-Zustand, als hätte man das zweite Elektron gleich ganz in den zu ψ orthogonalen Zustand φ gesetzt.

Fazit: Baut man einen 2-Elektronen-Zustand aus zwei 1-Elektronen-Zuständen, wird er ausschließlich durch die orthogonalen Anteile dieser beiden gebildet. Daher hätte sich auch derselbe Zustand $\Psi(1, 2)$ ergeben, wenn wir statt ψ und φ zwei beliebige andere ihrer linear unabhängigen Linearkombinationen mit je einem Teilchen besetzt hätten.

Beispiel: Der einzige¹⁶ und wohldefinierte Singulett-Zustand von zwei Spin- $1/2$ -Teilchen ergibt sich immer identisch gleich gemäß ($|+1/2\rangle|-1/2\rangle - |-1/2\rangle|+1/2\rangle$), ganz egal, mit welcher Orientierung der z -Achse die Basis $|m = \pm 1/2\rangle$ definiert wurde.

Das gleiche gilt für jedes Paar Elektronen in einem n -Elektronen-System. Für die einzelnen Elektronen müssen daher immer genau so viele paarweise orthogonale (Basis-)Zustände zur Verfügung stehen, wie es Elektronen im System gibt. Nachdem sie alle besetzt sind, sind automatisch auch alle ihre Linearkombinationen besetzt. Dieser ganze Teilraum der möglichen 1-Teilchen-Zustände ist für weitere Elektronen gesperrt. Statt zu sagen, n Elektronen besetzen n bestimmte 1-Teilchen-Zustände im gesamten Raum aller 1-Teilchen-Zustände, sollte man genauer sagen, sie besetzen einen bestimmten n -dimensionalen Unterraum davon. Welche Basis man zur näheren Beschreibung darin ausgewählt hat, bleibt sich völlig gleich. Mathematischer Grund für all dies ist (s. lineare Algebra): $\Psi^a(1, 2)$ kann man in Form einer Determinante aus Spaltenvektoren ψ und φ schreiben. Determinanten sind invariant gegen Linearkombinationen ihrer Spaltenvektoren und auch gegen orthogonale Transformationen von ihnen.

Anmerkung: Vertauscht man in einem Viel-Elektronen-System nicht zwei einzelne Elektronen sondern zwei Elektronenpaare, dreht sich das Vorzeichen zweimal um. Insofern hat eine antisymmetrische Viel-Elektronen-Wellenfunktion immer auch einen teilweise symmetrischen Charakter.

Austauschintegral. Es ist nun deutlich geworden, dass diese Verschränkung zu antisymmetrischen Zuständen nicht als Folge einer Kraft oder physikalischen Wechselwirkung, die die Teilchen auf einander ausüben, angesehen werden darf¹⁷. Vielmehr hat die Verschränkung selber Auswirkungen darauf, wie eine gegebene Kraft sich auswirken kann. Messbare Konsequenzen hat sie z.B. für die gegenseitige Coulomb-Abstoßung von je zwei Elektronen im selben Orbital der Atomhülle. Anhand dieser Konsequenz wurde die (Anti-)Symmetrisierung der Wellenfunktionen für gleiche Teilchen von Heisenberg 1926 überhaupt aufgespürt. Sie hat große Bedeutung für Feinheiten des Atomaufbaus, und damit für die optischen Spektren und nicht zuletzt die chemischen Reaktionen.¹⁸

¹⁶wenn die Ortswellenfunktionen festliegen

¹⁷Obwohl manche Konsequenz daraus so aussehen mag, siehe z.B. die Frage 4.6 in Kap. 4.2.2, ob die Coulomb-Abstoßung oder das Pauli-Prinzip für die Verringerung der totalen Bindungsenergie der Atomhülle wichtiger ist.

¹⁸Heisenberg konnte mit Hilfe symmetrischer bzw. antisymmetrischer Ortswellenfunktionen für die beiden Elektronen des Heliums erklären, warum dies Element zwei verschiedene, fast völlig unverbundene Termschemata aufweist, die Ortho- und Para-Helium genannt wurden. Ortho-Helium kommt dreimal häufiger vor und zeigt weniger Einfluss der gegenseitigen Abstoßung der Elektronen; den Grundzustand mit beiden Elektronen im 1s-Orbital gibt es nur im Para-Helium.

Frage 9.2 Zeigen Sie: Die abstoßende Coulomb-Kraft zwischen zwei Elektronen ist durch die Orbitale, die sie besetzen, noch nicht vollständig festgelegt. Sie hängt dann immer noch von der Vertauschungssymmetrie ihrer Ortsfunktion ab. Wenn die Orbitale räumlichen Überlapp haben, wirkt die Abstoßung sich im räumlich antisymmetrischen Zustand von Aufgabe 9.1 weniger stark aus als nach klassischer Rechnung, sonst stärker.

Antwort 9.2 Berechnet man für ein Potential $V(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$ den Erwartungswert der potentiellen Energie, bekommt man (mit Vereinfachung durch geeignetes Umtaufen der Integrationsvariablen an einigen Stellen):

$$\begin{aligned} E_{pot} &= \langle \Psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2) | V(\vec{r}_1, \vec{r}_2) | \Psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2) \rangle = \\ &= \frac{1}{2} \iint [\psi^*(\vec{r}_1) \varphi^*(\vec{r}_2) - \psi^*(\vec{r}_2) \varphi^*(\vec{r}_1)] V(\vec{r}_1, \vec{r}_2) [\psi(\vec{r}_1) \varphi(\vec{r}_2) - \psi(\vec{r}_2) \varphi(\vec{r}_1)] d^3\vec{r}_1 d^3\vec{r}_2 \\ &= \iint |\psi(\vec{r})|^2 |\varphi(\vec{r}')|^2 V(\vec{r}, \vec{r}') d^3\vec{r} d^3\vec{r}' - \iint [\psi^*(\vec{r}) \varphi(\vec{r})] [\psi(\vec{r}') \varphi^*(\vec{r}')] V(\vec{r}, \vec{r}') d^3\vec{r} d^3\vec{r}' \\ &= E_{pot}(\text{direkt}) - E_{pot}(\text{ausgetauscht}) . \end{aligned}$$

Das "direkte" Integral $E_{pot}(\text{direkt})$ hier ist genau die klassische potentielle Energie der beiden zu $\varphi(\vec{r})$ und $\psi(\vec{r})$ gehörenden Ladungsverteilungen $e|\varphi(\vec{r})|^2$ und $e|\psi(\vec{r})|^2$. Das Austauschintegral $E_{pot}(\text{ausgetauscht})$ ist die quantenmechanische Korrektur dazu (hier für den in $\vec{r}_1 \leftrightarrow \vec{r}_2$ antisymmetrischen Zustand von Aufgabe 9.1 mit einem Minus-Zeichen, bei symmetrischem Zustand mit Plus). Sein Wert hängt ersichtlich vom Ausmaß des räumlichen Überlapps beider Wellenfunktionen ab. Im Fall räumlich getrennter Aufenthaltswahrscheinlichkeiten (d.h. im ganzen Raum gilt $|\psi(\vec{r})|^2 |\varphi(\vec{r}')|^2 \equiv 0$, oder gleichbedeutend $\psi^*(\vec{r}) \varphi(\vec{r}') \equiv 0$), spielt die (Anti-)Symmetrie der 2-Teilchenwellenfunktion also gar keine Rolle. Wenn es aber Überlapp gibt, d.h. einen Bereich mit $\psi^*(\vec{r}) \varphi(\vec{r}') \neq 0$, dann ergibt sich $E_{pot}(\text{ausgetauscht})$ ungleich Null, und mit einem positiven Vorzeichen aufgrund der positiven Singularität des Coulomb-Potentials zwischen zwei gleichen Ladungen. Insgesamt folgt (bei Antisymmetrie der räumlichen Wellenfunktion) also eine Absenkung von E_{pot} gegenüber dem klassisch erwarteten Wert.

Identitätseffekte beobachtbar? Wie aus Aufgabe 9.2 mit herauszulesen ist, gibt es ein allgemein gültiges Kriterium dafür, dass der Austauschterm verschwindet, womit die Anti- bzw. Symmetrisierung für alle Beobachtungen folgenlos bleibt. Dafür genügt,

- dass die beiden 1-Teilchen-Zustände ψ und φ keinen Überlapp haben, und zwar in irgendeiner Koordinate – egal ob sie z.B. räumlich völlig getrennt sind oder festliegende unterschiedliche Spineinstellungen haben¹⁹,
- und dass der betrachtete Prozess (d.h. der Operator im Erwartungswert oder Matrix-Element) keine Übergänge dazwischen hervorrufen kann²⁰.

In diesen Fällen kann man immer mit dem einfachen, *reduziblen* (aber prinzipiell gesehen "falschen") Produkt-Zustand $\Psi(1, 2) = \psi(1) \varphi(2)$ rechnen, denn es kommt das gleiche heraus wie mit dem "richtigen", symmetrisch bzw. antisymmetrisch verschränkten Zustand.

Identität makroskopisch folgenlos? Damit kann auch verständlich werden, warum das bei Elementarteilchen so wichtige Phänomen der Ununterscheidbarkeit, mit seinen auch bis ins philosophische reichenden Konsequenzen, in der makroskopischen Welt nicht vorkommt. Zwei "Alltags-Teilchen", auch wenn sie "mikroskopisch kleine" Staubkörnchen sind, haben weit über (sagen wir, um eine Zahl zu greifen:) 10^{15} Atome. Da kann man mit dem gesunden Menschenverstand ausschließen, dass man sie in den gleichen inneren Zustand (analog dem parallelen Spin der beiden Elektronen in Aufgabe 9.2) versetzen könnte, auch wenn sie

¹⁹Damit ist nicht der Fall mit Gesamtspin Null gemeint (der Singulett-Zustand), denn dort hat kein Teilchen eine feste Spinkoordinate, beide Teilchen müssen mit beiden Spin-Quantenzahlen $m_s = \pm 1/2$ vorkommen (vgl. Drehimpuls-Kopplung, Kasten 7.3).

²⁰Das Coulomb-Potential kann z.B. in der nicht-relativistischen Schrödingerschen Wellenmechanik den Spin nicht umklappen.

sich makroskopisch gesehen ähneln mögen “wie ein Ei dem anderen”. Es genügt ja schon, dass ein einziger Operator, z.B. der für die Anzahl der Atome, für beide Körnchen verschiedene Eigenwerte annimmt. Ihre (inneren) Zustände sind dann nicht nur verschieden, sondern haben in dieser Koordinate auch keinen Überlapp. Und das bleibt auch so, denn keine normale Wechselwirkung kann sie wechselseitig mit kontrollierter Phase ineinander übergehen lassen, also verschränken. Das ist außer wegen der großen Teilchenzahl auch deswegen extrem unwahrscheinlich, weil solche Staubkörnchen eine ungeheuer große Anzahl innerer Freiheitsgrade haben, die sich (wegen der genau genommen doch schon makroskopischen Ausdehnung) auch noch mit vernachlässigbar geringer Energie anregen lassen (verglichen z.B. mit den $kT \approx \frac{1}{40} eV$ im Alltag).

Sollte es aber dereinst möglich werden, den quantenmechanischen Zustand makroskopischer Objekte zu kontrollieren und damit solche Interferenzen auch im Alltag zu produzieren – kaum auszudenken! (Der bereits viel genannte Quantencomputer wäre dann möglich. Die bereits gelungenen Beispiele einer Bose-Einstein-Kondensation von 10^6 Atomen bei $T = 10^{-9} K$ oder einer Quanten-Teleportation einzelner Photonen weisen in diese Richtung (□??).)

Andererseits ist im Umkehrschluss eine beruhigende Anmerkung zu machen: *Dass* die mit der Ununterscheidbarkeit verknüpften Phänomene bei Photonen und Elektronen so deutlich werden, kann man als einen Hinweis darauf lesen, dass wir uns wirklich der unteren Grenze der Zahl der Freiheitsgrade und damit der Teilbarkeit der Materie nähern.

Was heißt identisch? Physikalisch: Diese ganze Behandlung wäre aber inkonsistent, wenn aufgrund der Bewegungsgleichung (nach Schrödinger, Dirac, ...) in einer symmetrischen Wellenfunktion ein antisymmetrischer Anteil entstehen könnte, oder umgekehrt. In einem konsistenten Bild muss dies dadurch ausgeschlossen sein, dass der Hamiltonoperator \hat{H} mit dem Teilchenvertauschungsoperator \hat{X} vertauschbar ist (damit der einmal vorhandene Eigenwert $+1$ oder -1 von \hat{X} für alle Zeiten erhalten bleibt). Man hat dies als eine *Super-Auswahlregel* bezeichnet, weil sie einfach *alle* widersprechenden Prozesse verbietet.²¹ Was heißt das für den Hamiltonoperator genauer? Dass seine Summanden für die einzelnen identischen Teilchen *mathematisch gleich* sein müssen (einschließlich ihrer Wechselwirkungen miteinander, aber natürlich abgesehen von der laufenden Nummerierung der Koordinaten). Daraus ergibt sich, dass der Begriff “Identische Teilchen” genau für die Teilchen zutrifft, für die selbst der vollständigste Hamiltonoperator der Welt (der also sämtliche möglichen Prozesse beschreiben könnte) keine unterschiedlichen Summanden enthalten würde:

Identisch ist, was sich durch *keinen Prozess* unterscheiden lässt.

Was heißt identisch? Logisch: Eigenschaften zusätzlich zu denen, die im Hamiltonoperator schon auftauchen, kann bzw. darf so ein Teilchen dann auch nicht haben, noch nicht einmal eine lfd. Nummer. Auch folgt hieraus, dass verschiedene Exemplare identischer Teilchen in ihren Eigenschaften wie Masse, Ladung, g -Faktor etc. nicht nur im Rahmen der Messgenauigkeit übereinstimmen, sondern *mathematische Gleichheit* erfüllen müssen. Ein “fast gleich” kann es nicht geben [1]. (Da mag einen dann z.B. auch die bis zur 12. Dezimalstelle nachgewiesene Übereinstimmung der Anregungsenergien von Mössbauer-Kernen, die vielleicht aus verschiedenen Erdteilen stammen, nicht mehr so wundern, vgl. Kap. 6.1.3, Abb. 6.6.)

Die Antisymmetrie der Wellenfunktion hat zur Folge, dass die beiden Teilchen sich in *jeder nur denkbaren* Hinsicht gegenseitig vertreten können. Das ist auch in philosophischer Strenge der höchste Beweis der Identität, und stellt die Philosophie gleichzeitig vor ein Problem: Nach einem von G.W. Leibniz (Zeitgenosse Newtons und Erfinder der Differential-Rechnung in ihrer heute gewohnten Schreibweise) gefundenen logischen Prinzip²² **kann** es von derart “identischen” Dingen logisch gesehen gar nicht zwei “verschiedene”

²¹Es hätte auch das Wort *Erhaltungssatz* getan, denn der Symmetriecharakter ± 1 bei Vertauschung identischer Teilchen ist eine Erhaltungsgröße wie Energie, Drehimpuls, Ladung etc. auch.

²²Das *Prinzip der Identität der Ununterscheidbaren* – lat. *Principium Identitatis Indiscernibilium (pii)* wird formal so bewiesen (hier ohne den Formalismus umgangssprachlich ausgedrückt): Gegeben seien zwei Dinge A und B , die bei Beobachtung *jeder* beliebigen Eigenschaft f identische Ergebnisse liefern. Schreibt man die Bestimmung der Eigenschaft wie eine mathematische Funktion, heißt das: $f(A) = f(B)$ für jede beliebige Funktion f . Das nehmen wir für diejenige Funktion

Exemplare geben.

9.4 Zweite Quantisierung / Anfänge der Quanten-Feldtheorie

Vakuum. Nach den Vorbereitungen in Kap. 9.2 können wir nun daran gehen, für die Welt ein so grundlegendes theoretisches Modell zu entwerfen, dass wir zunächst nur absolut leeren Raum voraussetzen und alles, was darin möglich sein soll, explizit einführen müssen. Zunächst haben wir also die Welt in ihrem Grundzustand zu benennen: Das “Vakuum” wird durch einen eigenen Zustandsvektor²³ $|\mathbf{O}\rangle$ gegeben.

9.4.1 Freie Teilchen im Vakuum

Teilchen. Als nächstes soll es Teilchen geben. So wie von den Photonen her schon etwas gewohnt, und bei der Quantenmechanik des Harmonischen Oszillators mit den Auf- und Absteigeoperatoren zum ersten Mal ausgeführt²⁴, werden Elementarteilchen als gequantelte Anregungs-Zustände eines Feldes in diesem leeren Raum begriffen – daher der Name “Quanten-Feldtheorie”. In welchem Zustand $|k\rangle$ sich ein erzeugtes Teilchen befinden soll, wird durch einen entsprechenden Erzeugungsoperator \hat{a}_k^\dagger festgelegt: $|k\rangle = \hat{a}_k^\dagger |\mathbf{O}\rangle$. Mehrere Teilchen erhält man durch Anwenden weiterer Erzeugungsoperatoren. Vernichtung eines Teilchens im Zustand $|k\rangle$ wird – analog zum Absteigeoperator des Harmonischen Oszillators – durch den (zu \hat{a}_k^\dagger hermitesch konjugierten) Vernichtungsoperator \hat{a}_k beschrieben. (Weitere Formeln siehe Kasten 9.2.)

Kasten 9.2: Quanten-Feldtheorie – Basis-Zustände

Der Raum in seinem Grundzustand (“Vakuum”): Zustandsvektor $|\mathbf{O}\rangle$, Normierung $\langle \mathbf{O} | \mathbf{O} \rangle = 1$.

Anregung von 1 Teilchen durch Erzeugungsoperator: $|k\rangle = \hat{a}_k^\dagger |\mathbf{O}\rangle$

(Index k sagt, in welchem Zustand φ_k einer 1-Teilchen-Basis sich das erzeugte Teilchen befinden soll.)

Ortsbasis: $\hat{\psi}^\dagger(\vec{r})$ erzeugt ein Teilchen am Ort \vec{r} : $|\vec{r}\rangle = \hat{\psi}^\dagger(\vec{r}) |\mathbf{O}\rangle$

(Eigenzustand zum Ortsoperator, das Teilchen soll die Wellenfunktion $\psi(\vec{r}') = \delta(\vec{r}' - \vec{r})$ haben.)

Wellenfunktion des Zustands $|k\rangle$ in alter Sprechweise: $\varphi_k(\vec{r}) = \langle \vec{r} | \vec{k} \rangle = \langle \mathbf{O} | \hat{\psi}(\vec{r}) \hat{a}_k^\dagger |\mathbf{O}\rangle$

Anregung eines weiteren Teilchens im Zustand k' : $|k', k\rangle = \hat{a}_{k'}^\dagger \hat{a}_k^\dagger |\mathbf{O}\rangle$, etc.

Vernichtung durch den zu \hat{a}_k^\dagger hermitesch konjugierten Operator \hat{a}_k : $\hat{a}_k |k\rangle = |\mathbf{O}\rangle$

Vernichtung eines Teilchens, das gar nicht angeregt war: $\hat{a}_{k'} |k\rangle = 0$ (wenn φ_k und $\varphi_{k'}$ orthogonal);
immer gilt: $\hat{a}_k |\mathbf{O}\rangle = 0$ (=Null-Vektor bzw. Zahl Null)

Damit ist von Anfang an eingeführt: Elementarteilchen sind absolut ununterscheidbar und können überdies erzeugt und vernichtet werden.

Boson oder Fermion? Der ganze Unterschied Boson/Fermion ist in diesem Formalismus auf einfachste Weise darzustellen. Die Vertauschungsregeln (Kommutatoren bzw. Antikommutatoren), die man beim

f_{haec} in Anspruch, die jedem Ding *es selbst und nur es selbst* zuordnet: $f_{haec}(X) = X$. Aus der Voraussetzung folgt $f_{haec}(A) = f_{haec}(B)$, und daraus dann $A = B$, oder: A und B ist *dasselbe* Ding. – Was kann daran “falsch” sein? Für die identischen Teilchen gibt es so ein f_{haec} nicht. “*Genau dieses und kein anderes*” zu sein, ist keine ihrer Eigenschaften. Dass es in unserer Welt so etwas geben könne, hat man für undenkbar gehalten. Auch nach der Entdeckung dieser Tatsache in Gestalt der symmetrischen oder antisymmetrischen Wellenfunktionen identischer Teilchen vergingen noch Jahrzehnte bis zu ihrer Anerkennung. *Haec* ist lateinisch für “*genau dieses da*”, und diese den Elementarteilchen ermangelnde Eigenschaft heißt Häcceität. (Formaler Beweis z.B. in [6].)

²³Damit ist immer ein normierter Hilbertraum-Vektor gemeint, also $\langle \mathbf{O} | \mathbf{O} \rangle = 1$. Im Gegensatz dazu gibt es den Nullvektor $|0\rangle$, der aus jedem Vektor durch Multiplikation mit der Zahl Null hervorgeht und folglich die Norm $\langle 0 | 0 \rangle = 0$ hat.

²⁴Kap. 7.6.2

Rechnen mit diesen Operatoren ständig braucht, gelten einfach mit verschiedenen Vorzeichen:

Für Bosonen $-$, für Fermionen $+$:

$$\begin{aligned} \left[\hat{a}_A, \hat{a}_B^\dagger \right]_{\pm} &\equiv \hat{a}_A \hat{a}_B^\dagger \pm \hat{a}_B^\dagger \hat{a}_A = \begin{cases} 1 & \text{wenn } A = B \\ 0 & \text{wenn } A \neq B \end{cases} \quad (9.4) \\ \text{und } \left[\hat{a}_A^\dagger, \hat{a}_B^\dagger \right]_{\pm} &= 0 \end{aligned}$$

A und B sind zwei Zustände einer orthonormierten Basis. Ein Ergebnis 0 ist der Null-Operator, der jeden Zustandsvektor zum Nullvektor macht (nicht zum Vakuum-Zustand!).

Das Pauliprinzip z.B. ergibt sich dann so: Der untere Anti-Kommutator heißt ausgeschrieben

$$\hat{a}_A^\dagger \hat{a}_B^\dagger + \hat{a}_B^\dagger \hat{a}_A^\dagger = 0 .$$

Setzt man hierin $A=B$, um zwei Fermionen im selben Zustand zu erzeugen, folgt $2 \hat{a}_A^\dagger \hat{a}_A^\dagger = 0$. Das Ergebnis ist: $\hat{a}_A^\dagger \hat{a}_A^\dagger$ ist der Null-Operator.

Nichts als Teilchen-Erzeugung und -Vernichtung. Die weitere Ausarbeitung der 2. Quantisierung geht von der Idee aus, dass man den gesamten Hamiltonoperator (einschl. Wechselwirkungen) durch die \hat{a} und \hat{a}^\dagger ausdrücken kann. Dann braucht man den Teilchen(-Koordinaten) keine Nummerierung zu geben, ja noch nicht einmal vorher festzulegen, wie viele Teilchen es im betrachteten System geben soll. Die Besetzungszahl n_A eines bestimmten Zustands A ist einfach eine weitere Messgröße, dafür gibt es den Teilchenzahloperator, der (für Fermionen und Bosonen) bequemerweise einfach $\hat{n}_A = \hat{a}_A^\dagger \hat{a}_A$ heißt (aufgrund der genauen Normierungsfaktoren). Der Operator \hat{n}_{gesamt} für die gesamte Teilchenzahl n_{gesamt} fragt einfach alle Basiszustände ab. Er heißt (unabhängig von der Wahl der Basis) : $\hat{n}_{\text{gesamt}} = \sum_A \hat{n}_A$.

9.4.2 Der Hamilton-Operator für freie Teilchen

Wenn als 1-Teilchen-Zustände $|k\rangle$ gerade die Energie-Eigenzustände des 1-Teilchen-Systems gewählt werden – Eigenwerte mit $E(k)$ bezeichnet –, und $\hat{n}_k = \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k$ der Operator für die Besetzungszahlen dieser Zustände ist, und ferner von jeder Wechselwirkung der Teilchen untereinander und mit einem äußeren Feld abgesehen wird, dann ist

$$\hat{H}_{\text{freie Teilchen}} = \sum_k E(k) \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k \quad (9.5)$$

offenbar schon der Operator für die Gesamtenergie. Mithin ist dies der Hamilton-Operator für alle Systeme beliebig vieler freier Teilchen (einer Sorte) in beliebiger Verteilung auf die 1-Teilchen-Niveaus. Dabei muss die Summation in Gl. (9.5) über eine vollständige Basis der 1-Teilchen-Zustände laufen, damit beim Abzählen jeder Basiszustand genau einmal aufgerufen wird. Um Übereinstimmung mit der Realität freier Elektronen zu erhalten, wählt man z.B. die Basis der Impulseigenzustände ($\vec{p} = \hbar \vec{k}$, $E(k) = ((pc)^2 + (mc^2)^2)^{1/2}$). Die Summe (in Gl. 9.5) meint dann natürlich zwei 3-dimensionale Integrale über all \vec{k} -Vektoren, je eins für die beiden Richtungen des Spins bezüglich einer beliebig gewählten z -Achse.

Genauso würde auch der Hamiltonoperator für freie Photonen aussehen, die als Quanten eines *anderen* Feldes im *selben* Vakuum erzeugt werden können und zur Unterscheidung mit einem anderen Buchstaben bezeichnet werden müssen:

$$\hat{H}_{\text{rad}} = \sum_p \hbar \omega \hat{c}_p^\dagger \hat{c}_p \quad (9.6)$$

Der Laufindex aller Basis-Zustände ist mit p abgekürzt und schließt auch die beiden Polarisationsrichtungen σ ein. Im Vergleich zu (Gl. 9.2) ist die Nullpunktsenergie $\sum \hbar \omega / 2$ einfach weggelassen – sonst würde schon hier fürs Vakuum eine zwar konstante, aber unendliche Energie herauskommen: Eine erste Andeutung der kommenden formalen Schwierigkeiten des Verfahrens.

Für eine Welt, in der es Elektronen und Photonen, aber (noch) keine Wechselwirkung zwischen ihnen geben soll, wäre der Hamiltonoperator $\hat{H}_0 = \hat{H}_{freie\ Elektronen} + \hat{H}_{rad}$ richtig. Kein Elektron oder Photon würde jemals neu erzeugt oder vernichtet oder auch nur seinen Zustand ändern: Das Modell ist noch etwas realitätsfern.

9.4.3 Mögliche Prozesse und der Hamilton-Operator mit Wechselwirkungen

Übergangoperator. Alle Prozesse, die in unserer Modell-Welt möglich sein sollen, müssen durch zusätzliche Summanden in den Hamilton-Operator eingeführt werden. Als Resultat eines Prozesses müssen Teilchen ihren Zustand geändert, d.h. *einen Übergang gemacht* haben. Dafür hält die 2. Quantisierung eine bestechend elegante Formulierung bereit, die vollständig auf zwei der grundlegenden Eigenschaften der Elementarteilchen beruht: ihrer Ununterscheidbarkeit und der Möglichkeit der Erzeugung und Vernichtung. Selbst wenn ein Teilchen sich nur von A nach B bewegen soll, beschreibt man das so, dass man bei A eins vernichtet und bei B eins (das selbe?? – egal: ein identisches) erzeugt. Mit dem Vernichtungsoperator \hat{a}_A und dem Erzeugungsoperator \hat{a}_B^\dagger ist $\hat{H}_{ww} = \hat{a}_B^\dagger \hat{a}_A$ der *Übergangs-Operator*, der ein Teilchen vom Zustand “ A ” in den Zustand “ B ” übergehen lässt.

Dies natürlich nur, wenn \hat{H}_{ww} auf einen Zustand angewendet wird, wo der Zustand A mit mindestens einem Teilchen besetzt ist – sonst kommt schlicht Null heraus (als Zahl oder Nullvektor, nicht etwa das Vakuum mit seinem normierten Zustandsvektor).

Quantensprung. Erfreuliches Nebenergebnis: Mit der Formulierung durch den Übergangoperator ist der mysteriöse “Quantensprung” in eine Form gebracht, in der es keine (“überflüssigen”) Fragen mehr geben kann, wo das Teilchen denn wohl *während* des Übergangs gewesen sei. Will man es wissen, muss man nachschauen – und dann spielt der Ort, wo man in dem betreffenden Teil des Experiments nachschaut, für den Übergang die Rolle des Endzustands “ B ”.

Wechselwirkungen einbauen. Nun muss ein geeigneter Hamilton-Operator gefunden werden, der festlegt, welche Prozesse möglich sein und mit welchen Übergangsraten sie geschehen sollen. Es sei erinnert, dass in der Quantenmechanik in der vorher gewohnten Form der Hamilton-Operator gleichzeitig zwei Bedeutungen hat. Er drückt einerseits die Gesamt-Energie aus, und er bestimmt andererseits die zeitliche Entwicklung des Zustands, auf den er angewendet wird, z.B. die Übergangsamplitude zu einem beliebigen Endzustand, woraus die Goldenen Regel folgt (s. Kap. 6.1.2).

Um einen geeigneten Hamilton-Operator zu finden, wird in der früheren Form der Quantenmechanik gewöhnlich von der energetischen Bedeutung ausgegangen. Man fügt z.B. für je zwei geladene Teilchen einen Summanden $e^2/|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|$ für die Coulomb-Energie hinzu, für die magnetische Wechselwirkung ein Glied²⁵ $\vec{j} \cdot \vec{A}$ – Terme, wie sie aus den klassischen Formeln für die Energie eines Mehrteilchen-Systems abgelesen werden können.

In der 2. Quantisierung geht man von dem anderen Ansatzpunkt aus: Welche Prozesse sollen möglich sein? So stellte sich Fermi diese Frage 1933 bei der Suche nach einer Formulierung seiner neuen *Schwachen Wechselwirkung* in seiner Theorie des β -Zerfalls (s. Kap. 6.5.7). Nun gibt es aber eine so unüberschaubare Vielzahl möglicher Prozesse, insbesondere wenn viele Teilchen beteiligt sind, dass dies Vorgehen zunächst hoffnungslos aussehen muss. Aber sehen wir uns trotzdem einmal an, wie solche Wechselwirkungs-Operatoren in den beiden einfachsten Fällen aussehen müssten.

1 Elektron macht einen Quantensprung und sendet 1 Photon aus. Der Übergangoperator dazu ist

$$\hat{H}_{emission} = \hat{a}_{A'}^\dagger \hat{a}_A \hat{c}_p^\dagger \quad (9.7)$$

Er lässt das Elektron vom Zustand A in den Zustand A' springen und erzeugt dabei das Photon p . Soll das Elektron A verschiedene Photonen emittieren können, muss der Hamiltonoperator eine Summe aller entsprechenden Übergangoperatoren enthalten, jeder einzelne mit einem jeweils passend gewählten

²⁵Skalarprodukt von Stromdichte und Vektorpotential

Endzustand A' und einem passenden Gewichts-Faktor davor für die Übergangsamplitude. Summiert wird über die Photonen-Zustände p . Und sollen auch Elektronen, die gerade in anderen Zuständen als A sitzen, Photonen emittieren dürfen, muss auch noch über alle solche Anfangszustände A summiert werden. Der gesamte Wechselwirkungsoperator für den Vorgang Emission ist also eine Doppelsumme über Summanden wie Gl. (9.7), summiert über Indizes p und A (wobei A' jeweils passend ergänzt wurde).

Zur Absorption gehört ebenso die Doppelsumme über alle Operatoren

$$\hat{H}_{absorption} = \hat{a}_A^\dagger \hat{a}_{A'} \hat{c}_p . \quad (9.8)$$

2 geladene Teilchen werden aneinander gestreut. Aus ihren Anfangszuständen A, B (z.B. wenn sie mit bestimmten Impulsen aufeinander zu fliegen) gehen sie dabei in Endzustände A', B' über, also muss der Übergangsoperator etwa wie

$$\hat{H}_{Sto\beta} = \hat{a}_{B'}^\dagger \hat{a}_B \hat{a}_{A'}^\dagger \hat{a}_A \quad (9.9)$$

aussehen. Halten wir zunächst die Anfangszustände A und B fest, muss natürlich wieder die Möglichkeit vieler verschiedener Endzustände in den Hamilton-Operator eingebaut werden. Das geschieht durch eine Summation über die Indizes A' und B' , die so ausgewählt werden müssen, dass jeder einzelne der Summanden die Erhaltung von Energie und Impuls garantiert. Um auch den Teilchen in anderen Anfangszuständen als A und B die Erlaubnis zur Wechselwirkung zu erteilen, muss man auch über A und B summieren.

Da es sich um einen elastischen Stoß handelt²⁶, entsprechen die Endzustände einfach verschiedenen Ablenkwinkeln ϑ bzw. Impuls-Überträgen $\Delta\vec{p} = \hbar\Delta\vec{k} = 2p \sin \vartheta$ (s. Kap. 2.2.1 und 5.1). In der Wirklichkeit treten sie mit verschiedenen Wahrscheinlichkeiten auf, müssen hier also verschiedene Übergangsamplituden bekommen. Jeder Summand der Form Gl. (9.9) muss daher noch mit einem geeigneten Faktor versehen werden, nämlich der aus Kap. 5.3 schon bekannten Streuamplitude $f(\Delta p)$. Zusammen:

$$\hat{H}_{Sto\beta} = \sum_{\substack{A, A', B, B' \\ (\vec{p}_{A'} - \vec{p}_A = \vec{p}_B - \vec{p}_{B'} = \Delta\vec{p})}} f(\Delta p) \hat{a}_{B'}^\dagger \hat{a}_B \hat{a}_{A'}^\dagger \hat{a}_A \quad (9.10)$$

Wirkt zwischen zwei (verschiedenen) Teilchen die Coulombkraft, wissen wir die Streuamplitude schon: $f(\Delta p) \propto 1/\Delta p^2$ (s. Gl. 5.14) Dies nehmen wir im nächsten Abschnitt zum Testfall für die ganze Entwicklung. Es zeigt sich nämlich bei näherer Ausarbeitung, dass man Wechselwirkungsoperatoren wie Gl. (9.9) (und kompliziertere) im Hamiltonoperator gar nicht braucht, wenn man nur die beiden erstgenannten für Emission und Absorption (Gl. 9.7, 9.8) nimmt und alles weitere der konsequenten Anwendung der quantenmechanischen Störungstheorie überlässt.

9.5 Der grundlegende Prozess der elektromagnetischen Wechselwirkung

Das Vorhaben. Wie sieht der Zusatz zum Hamilton-Operator der freien Teilchen aus, der die elektromagnetische Wechselwirkung beschreibt? Wie sich jetzt herausstellen wird, genügt das Einfügen eines elementaren Prozesses:

Der elementare Prozess der elektromagnetischen Wechselwirkung
ist das Erzeugen oder Vernichten eines Photons.

Alles Weitere, sogar auch das *elektrostatistische Feld*, ergibt sich daraus. Dies bedeutet nichts weniger als die Behauptung, die moderne Physik könne erklären, *auf welche Weise* eine Ladung den umgebenden Raum so verändert, wie es der klassische Feldbegriff der Physik von Faraday seit 1835 postuliert.

²⁶Für wirklich elementare Teilchen, für die hier das Vorgehen entwickelt wird, kann es ja keine inneren Anregungen, also inelastische Stöße geben.

Erster Schritt. Ausgangspunkt der Begründung ist, dass Absorption und Emission von Lichtquanten zweifellos zu den elektromagnetischen Wechselwirkungen von Elektronen gehören. Folglich muss ein für die Beschreibung geeigneter Hamilton-Operator *mindestens* den Prozess enthalten, dass ein Photon *entsteht* oder *verschwindet*, wobei ein Elektron, das schon vorhanden sein muss, seinen Zustand *ändert*, um die Erhaltung von Energie, Impuls und Fermionenzahl zu gewährleisten. Ein realistischer Hamilton-Operator muss für die elektromagnetischen Wechselwirkung demnach die oben eingeführten Terme $\hat{H}_{emission} = \hat{a}_B^\dagger \hat{a}_A \hat{c}_p^\dagger$ und $\hat{H}_{absorption} = \hat{a}_A^\dagger \hat{a}_B \hat{c}_p$ enthalten, mindestens. Photonenzustände p und Elektronenzustände A und B müssen dabei alle physikalisch denkbaren Kombinationen durchlaufen. Denn was wir in diesem Hamilton-Operator nicht vorkommen lassen, wäre in der von uns modellierten Natur ausgeschlossen.

Für diese einzelnen Summanden nehmen wir – wie bei den freien Teilchen im vorigen Abschnitt – die Basis aller jeweiligen Impulseigenzustände (von Elektron und Photon) und lassen davon aber nur die Kombinationen zu, die dem Impuls- und Energie-Erhaltungssatz gehorchen. (Bei der gewählten Notation also für Emission und Absorption beide Male $\vec{p}_A = \vec{p}_B + \vec{p}_\gamma$ und $E_A = E_B + E_\gamma$. Genau genommen müssen auch alle Polarisations- bzw. Spin-Zustände mit durchlaufen werden, aber das wird hier zwecks Vereinfachung der Darstellung weggelassen.) Außerdem muss noch eine *Kopplungskonstante* g eingefügt werden, die überhaupt die Stärke der Wechselwirkung angibt; schwerer nachzuvollziehen ein weiterer Faktor $(p_\gamma c)^{-1/2}$, der sich aus der länglichen Umrechnung der freien elektromagnetischen Felder in Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren von Photonen ergibt (d.h. aus der “Quantisierung des freien Maxwell-Feldes”).

Damit lautet der bisherige Ansatz, nun etwas vollständiger ausgeschrieben:

$$\hat{H}_{WW} = g \sum'_{A,B,p} \frac{1}{\sqrt{p_\gamma c}} (\hat{a}_B^\dagger \hat{a}_A \hat{c}_p^\dagger + \hat{a}_A^\dagger \hat{a}_B \hat{c}_p). \quad (9.11)$$

Der Akzent am Summenzeichen soll daran erinnern, dass nur über die Kombinationen von Zuständen summiert wird, die der Energie-Impuls-Erhaltung genügen.

In jedem Summanden ist der Absorptionsterm das hermitesch konjugierte des Emissionsterms, so dass \hat{H}_{WW} und damit der ganze Hamiltonoperator $\hat{H} = \hat{H}_{freies\ Elektron} + \hat{H}_{rad} + \hat{H}_{WW}$ hermitesch wird, wie es sein muss²⁷.

Am Ziel. Das ist alles. Es hat sich gezeigt, dass weitere Wechselwirkungsoperatoren nicht benötigt werden, um die beobachteten elektrodynamischen Vorgänge aller Art berechnen zu können (z.B. Emission, Absorption und Streuung von Licht und Gammastrahlung, magnetische Kräfte bis hin zur Anomalie der magnetischen Momente von Elektron und Myon, letzteres auf 12 Stellen genau). Auch das klassische Coulomb-Potential ergibt sich, wenn man mit diesem Hamiltonoperator die Energie zweier ruhender Ladungen ausrechnet. In quantenfeldtheoretischer Sichtweise ist das klassische elektrostatische Potential also eine *effektive Wechselwirkung*.

Schon mit diesem minimalen Ansatz ergibt sich die **Quanten-Elektrodynamik (QED)**, eine Theorie, deren Genauigkeit in der Physik bisher unübertroffen ist. Dabei wird der Anschauung aber auch ein Problem zugemutet, das vielleicht genau so schwierig zu verdauen ist wie vorher der Welle-Teilchen-Dualismus der einfachen Quantenmechanik: Man muss die Teilchen neben den bisher bekannten “reellen” Zuständen auch in “virtuellen Zuständen” betrachten. Trotzdem ein großer Erfolg der Elementarteilchen-Physik. Der Weg dahin soll im Folgenden skizziert werden (s. auch Kasten 9.3 “Quanten-Elektrodynamik (QED) – vereinfachter Einstieg, einfachste Prozesse”).

9.6 Virtuelle Photonen

Realer Ausgangspunkt. Jedes reelle (d.h. “wirkliche”, d.h. beobachtete) Teilchen mit Energie E , Impuls p und (Ruhe-)Masse m befolgt stets und in Strenge die Energie-Impuls-Beziehung aus der Speziellen Relativitätstheorie:

$$E^2 = (\vec{p}c)^2 + (mc^2)^2 \quad (9.12)$$

²⁷ D.h. alle seine Eigenwerte sind reell, und alle Prozesse können rückwärts ablaufen.

Kasten 9.3: Quanten-Elektrodynamik (vereinfachter Einstieg, einfachste Prozesse)

Ansatz: Zum Hamiltonoperator für freie Teilchen \hat{H}_0 tritt ein Wechselwirkungsoperator \hat{H}_{WW} , der die Möglichkeit der Erzeugung/Vernichtung ($\hat{c}_p^\dagger / \hat{c}_p$) von Photonen beschreibt, wobei ein Elektron seinen Zustand ändern (*einen Übergang machen*) muss – sonst nichts.

Operator für Übergänge zwischen Elektronen-Basiszuständen: $\varphi_A \rightarrow \varphi_{A'} : \hat{a}_{A'}^\dagger \hat{a}_A$

(“als ob das Elektron im Zustand A kurz vernichtet und im Zustand A' neu erzeugt worden wäre”)

Als **Bestandteile** von \hat{H}_{WW} offenbar notwendig: $\hat{H}_{emission} = \hat{a}_{A'}^\dagger \hat{a}_A \hat{c}_p^\dagger$ und $\hat{H}_{absorption} = \hat{a}_A^\dagger \hat{a}_{A'} \hat{c}_p$, wobei alle Kombinationen mit $\vec{p}_A = \vec{p}_{A'} + \vec{p}_\gamma$ und $E_A = E_{A'} + E_\gamma$ zugelassen sind (Energie/Impulserhaltung)

Außerdem: eine (dimensionslose) Kopplungskonstante $g = \sqrt{e^2/4\pi\epsilon_0\hbar c} = \sqrt{1/137.037\dots} \approx 0.08$, sowie ein Faktor $1/\sqrt{p_\gamma c}$ (aus der Normierung der Wellenfunktionen).

Minimaler **Wechselwirkungsoperator:** $\hat{H}_{WW} = g \sum_{A,B,p} \frac{1}{\sqrt{p_\gamma c}} (\hat{a}_{A'}^\dagger \hat{a}_A \hat{c}_p^\dagger + \hat{a}_A^\dagger \hat{a}_{A'} \hat{c}_p)$

Testfall 1: Rutherford-Streuung $|A, B\rangle \rightarrow |A', B'\rangle$.

Mit Gliedern von \hat{H}_{WW} nur so zu erhalten: $\hat{H}_{absorption} \hat{H}_{emission} = \hat{a}_{B'}^\dagger \hat{a}_B \hat{c}_{\Delta p} \hat{a}_{A'}^\dagger \hat{a}_A \hat{c}_{\Delta p}^\dagger$

Das Photon ist nicht real zu sehen, sein Impuls $\Delta\vec{p} = \vec{p}_{A'} - \vec{p}_A = \vec{p}_B - \vec{p}_{B'}$ ist der Impulsübertrag.

Streuamplitude: $f = \sum_{X,Y,p} \frac{\langle A', B' | \hat{H}_{WW} | X, Y, p \rangle \langle X, Y, p | \hat{H}_{WW} | A, B \rangle}{E_{X,Y,p} - E_{AB}}$ (2. Ordnung Störungstheorie)

Darin sind nur 2 Summanden ungleich Null: $|X, Y, \vec{p}\rangle = |A', B, \Delta\vec{p}\rangle$ bzw. $|X, Y, \vec{p}\rangle = |A, B', -\Delta\vec{p}\rangle$

Resultat: $f = g^2/(\Delta p)^2$ Das ist die Fourier-Transformierte des Coulomb-Potentials (vgl. Bornsche Näherung Kap. 5)

Fazit: \hat{H}_{WW} enthält bereits die Wirkung des Coulomb-Potentials. (Für ruhende lokalisierte Teilchen kommt auch die Coulomb-Energie richtig heraus – Fermi 1931.)

Problem: \hat{H}_{WW} (in 1. Ordnung) enthält nur verbotene Prozesse, erst \hat{H}_{WW}^2 wieder erlaubte. Eine Beobachtung des Systems in einem der Zwischenzustände $|X, Y, \vec{p}\rangle$ würde den Energiesatz widerlegen. Das Photon darin kann nicht $E = pc$ gehorchen. Daher der Name “virtueller Zustand” bzw. “virtuelles Photon”: es steht nur auf dem Papier, hat “virtuelle Realität”.

Die virtuellen Photonen, die das Coulomb-Feld machen, sind z.B. longitudinal polarisiert.

Testfall 2: Compton-Effekt $|A, p\rangle \rightarrow |A', p'\rangle$.

Zuständiger Summand von \hat{H}_{WW}^2 : $\hat{H}_{Compton} = \hat{H}_{emission} \hat{H}_{absorption} = \hat{a}_{A'}^\dagger \hat{a}_B \hat{c}_{p'}^\dagger \hat{a}_B^\dagger \hat{a}_A \hat{c}_p$

Im Zwischenzustand $|B\rangle$ ein “virtuelles Elektron”: $E_B^2 \neq (p_{BC})^2 + (mc^2)^2$.

Trotzdem (*genauer gesagt: deswegen*) die richtige Begründung für die Klein-Nishina-Formel (1928).

Daher haben die einfachen Ansätze für $\hat{H}_{emission}$ und $\hat{H}_{absorption}$ aus dem vorigen Abschnitt einen gravierenden Konstruktionsfehler: Dort soll ein frei fliegendes Elektron ($m_e \neq 0$) ein Photon ($m_\gamma = 0$) absorbieren oder emittieren. Das kann aber in der Wirklichkeit nicht passieren, denn wenn das Elektron den Photonen-Impuls p_γ aufnehmen (oder abgeben) soll, kann sich seine Energie nicht um $E = p_\gamma c$ ändern, wie vom Photon angeboten (das gilt immer – vgl. Compton-Effekt und Photo-Effekt in Kap. 6.4.3, 6.4.4 –, ist am einfachsten zu sehen im speziellen Bezugssystem eines einzelnen ruhenden Elektrons). Damit in $\hat{H}_{emission}$ oder $\hat{H}_{absorption}$ jeweils die Erhaltung von Energie und Impuls gewährleistet ist, können von den drei darin angesprochenen Zuständen (ein Zustand fürs Photon, zwei fürs Elektron) immer nur zwei im Einklang mit der Energie-Impuls-Beziehung der betreffenden Teilchenart gewählt werden, der dritte nicht. Das Matrixelement eines solchen Operators zwischen einem realen Anfangszustand und einem realen Endzustand ist immer Null; die erste Näherung der Störungstheorie, in der man den gesuchten Effekt mit den unveränderten Zuständen (also denen der Nullten Näherung) zu berechnen versucht (s. Kasten S. 2011), bringt hier kein Ergebnis. Wie erklärt sich, dass man trotzdem etwas Richtiges ausrechnen kann, wenn die Quanten-Elektrodynamik doch von so unmöglichen Grundlagen ausgeht? So:

Näherung 2. Ordnung. Man nimmt den Hamilton-Operator wie oben in Gl. (9.11) angegeben und berechnet damit aus der Schrödinger- (oder – s. Kap. 10.2 – aus der Dirac-) Gleichung die zeitliche Änderung eines Zustands, aber nun nicht nur bis zur linearen ersten Näherung, sondern weiter. Die Taylor-Entwicklung enthält ja auch höhere Ableitungen:

$$\Psi(t + \Delta t) = \Psi(t) + \frac{i}{\hbar} \hat{H} \Psi(t) \Delta t + \frac{1}{2!} \left(\frac{i}{\hbar} \hat{H} \right)^2 \Psi(t) (\Delta t)^2 + \dots \quad (9.13)$$

Schon bei der 2. Ordnung, im Operator $\hat{H}^2 = (\hat{H}_0 + \hat{H}_{WW}) (\hat{H}_0 + \hat{H}_{WW})$, tritt \hat{H}_{WW} zweimal in Aktion. Dazwischen liegt die neue Welt der virtuellen Zustände.

Ein virtuelles Photon ... \hat{H}_{WW} ist nach Gl. (9.11) eine unendliche Summe *aller möglichen* Wechselwirkungs-Operatoren $\hat{H}_{emission}$ und $\hat{H}_{absorption}$. Wird sie mit sich selber multipliziert, treten *alle möglichen* Produkte von je zwei von ihnen auf. Betrachten wir z.B. den Summanden, in dem das Produkt

$$\hat{H}_{absorption} \hat{H}_{emission} = \hat{a}_{B'}^\dagger \hat{a}_B \hat{c}_{p\gamma} \hat{a}_{A'}^\dagger \hat{a}_A \hat{c}_{p\gamma}^\dagger \quad (9.14)$$

vorkommt (man beachte, dass die Zustands-Indizes fürs Photon gleich, für die Elektronen verschieden gewählt sind). Angewandt auf einen beliebigen Anfangszustand, wird hier in einem Zug ein Photon p_γ erst erzeugt und gleich wieder vernichtet (Produkte von Operatoren muss man von rechts her lesen, das hat aber nicht direkt etwas mit einer zeitlichen Reihenfolge zu tun). Dies “intermediäre” Photon taucht also in der Außenwelt gar nicht auf – ist “virtuell” geblieben. Ohne in Widerspruch zu den beobachteten Tatsachen zu geraten darf man ihm gestatten, die Grundgleichung $E = p_\gamma c$ der *reellen* Photonen zu verletzen, und dann können alle 4 Elektronenzustände A, B, A', B' ohne weiteres im Einklang mit der Energie-Impuls-Beziehung (Gl. 9.12) gewählt werden – also reelle Elektronen beschreiben. Wozu kann das gut sein?

... und seine reale Wirkung. Der Stör-Operator in Gl. (9.14) enthält für Elektronen in den Zuständen A und B Vernichtungsoperatoren. Wenn er bei Anwendung auf einen 2-Teilchen-Zustand nicht eine Null erzeugen soll, muss er auf zwei Elektronen in genau diesen Zuständen treffen. Er enthält weiter zwei Elektronen-Erzeugungsoperatoren. Demnach beschreibt er den Prozess, in dem zwei Elektronen aus den (freien) Zuständen A und B in die (freien) Zustände A' und B' übergehen. Wegen der Verabredung, die Summe in \hat{H}_{WW} (Gl. 9.11) nur im Einklang mit Impuls- und Energie- Erhaltung zu bilden, gilt $\vec{p}_A = \vec{p}_{A'} + \vec{p}_\gamma$ und $\vec{p}_{B'} = \vec{p}_B + \vec{p}_\gamma$, d.h. die Impulsänderungen $\Delta\vec{p} = \vec{p}_A - \vec{p}_{A'} \equiv \vec{p}_\gamma \equiv -(\vec{p}_{B'} - \vec{p}_B)$ sind entgegengesetzt gleich, und die Energieänderungen ebenso. Gesamt-Impuls $\vec{P} = \vec{p}_A + \vec{p}_B \equiv \vec{p}_{A'} + \vec{p}_{B'}$ und Gesamt-Energie sind folglich erhalten geblieben. Der ganze Prozess ist also nicht unmöglich. Vielmehr entspricht er ganz und gar der Elektronenstreuung, einer Standardsituation vieler Experimente. Nur hätte man das Ergebnis bis jetzt eher so ausgedrückt, dass zwischen den Teilchen ein Kraft-Feld existiert, das für den beobachteten Impulsübertrag $\Delta\vec{p}$ verantwortlich ist, während hier das intermediäre Photon $\vec{p}_\gamma = \Delta\vec{p}$, das nur auf dem

Papier existiert hat, diese Rolle übernimmt. Näheres Ausrechnen zeigt nun, dass die Elektronen vermittelt dieses intermediären Photons genau so aufeinander einwirken, *als ob* wirklich das Coulomb-Feld zwischen ihnen herrschte. Dabei hat – um es noch einmal zu sagen – der Hamilton-Operator gar keinen Summanden $V(r)$ für potentielle Energie enthalten.

In Formeln. Um dies nachzuprüfen, berechnet man die Übergangsamplitude f , die der Wechselwirkungsterm \hat{H}_{WW} durch zweimaliges Anwenden zwischen den zwei “ungestörten” \hat{H}_0 -Eigenzuständen bewirken kann: zwischen dem Anfangszustand $|\Psi_{\text{ini}}\rangle = |A, B\rangle$ mit den beiden freien Elektronen (Zustände A und B , Eigenwertgleichung $\hat{H}_0|\tilde{\Psi}_{\text{ini}}\rangle = E_{\text{ini}}|\tilde{\Psi}_{\text{ini}}\rangle$) und einem beliebig festgelegten Endzustand $|\Psi_{\text{fin}}\rangle = |A', B'\rangle$ zur selben Energie. Die Formel für diese Übergangs-Amplitude²⁸ ist in 2. Ordnung Störungstheorie

$$f = \sum_{\tilde{\Psi}_{\text{intermediär}}} \frac{\langle \Psi_{\text{fin}} | \hat{H}_{WW} | \tilde{\Psi}_{\text{intermediär}} \rangle \langle \tilde{\Psi}_{\text{intermediär}} | \hat{H}_{WW} | \Psi_{\text{ini}} \rangle}{E_{\text{intermediär}} - E_{\text{ini}}} \quad (9.15)$$

Der Summationsindex ist hier mit $\tilde{\Psi}_{\text{intermediär}}$ bezeichnet und muss irgendeine Basis aller denkbaren \hat{H}_0 -Eigenzustände durchlaufen, also die Zustände zu allen seinen möglichen reellen Energie-Eigenwerten gemäß

$$\hat{H}_0|\tilde{\Psi}_{\text{intermediär}}\rangle = E_{\text{intermediär}}|\tilde{\Psi}_{\text{intermediär}}\rangle.$$

Formal kommen sie *alle* als “Zwischenzustände” in Frage. Ihre Beiträge werden mit steigender Energiedifferenz $E_{\text{intermediär}} - E_{\text{ini}}$ im Nenner immer geringer. Die meisten der Summanden in Gl. (9.15) sind allerdings ohnehin Null, weil mindestens eins der Matrixelemente im Zähler verschwindet. Nur solche Zwischenzustände tragen bei, die durch \hat{H}_{WW} aus dem Anfangszustand Ψ_{ini} erst hervorgebracht und dann, wiederum durch \hat{H}_{WW} , in den Endzustand Ψ_{fin} übergeleitet werden können²⁹. Hierzu müssen sie zusätzlich zu den beiden beteiligten Elektronen ein Photon enthalten, alle anderen scheiden aus. Auch die beiden Faktoren \hat{H}_{WW} sind unendliche Summen (s. Gl. 9.11), und jeder ihrer Summanden kann immer nur an einem der beiden Elektronen den Impuls ändern. Um so von Ψ_{ini} über $\tilde{\Psi}_{\text{intermediär}}$ nach Ψ_{fin} zu kommen, muss das zusätzliche Photon in $\tilde{\Psi}_{\text{intermediär}}$ genau den Impuls haben, der von einem aufs andere Elektron übertragen werden soll. Daher bleibt von der ganzen Summe am Ende doch nur ein einziger Summand übrig, genauer: zwei Summanden, denn das intermediäre Photon kann den Impuls $\Delta\vec{p} = \vec{p}_A - \vec{p}_{A'}$ vom Teilchen $|A\rangle$ nehmen und zu $|B\rangle$ “bringen”, oder den umgekehrten Impuls $-\Delta\vec{p} = \vec{p}_{A'} - \vec{p}_A$ von $|B\rangle$ zu $|A\rangle$. Im ersten Fall heißen die beiden relevanten Summanden der \hat{H}_{WW} genau so wie in Gl. (9.9), im anderen Fall haben die Operatoren mit Indizes A, A' ihre Plätze mit denen für B, B' vertauscht³⁰.

Entstehung des Coulomb-Felds. Rechnet man die Streu-Amplitude (Gl. 9.15) aus, zeigt sich eine charakteristische Abhängigkeit vom Impulsübertrag. Im Nenner steht $E_{\text{intermediär}} - E_{\text{ini}} = E_\gamma = \Delta p c$, und zwei weitere Faktoren $\sqrt{\Delta p c}$ werden noch von den beiden Operatoren \hat{H}_{WW} beigesteuert, s. Gl. (9.11). Genau durchgerechnet ergibt sich die Übergangsamplitude zu

$$f = g^2 \frac{1}{(\Delta p)^2} \quad (9.16)$$

In Worten: Wenn virtuelle Photonen eine Wechselwirkung zweier geladener Teilchen vermitteln, dann wird dabei der Impuls Δp mit einer Amplitude proportional zu $(\Delta p)^{-2}$ übertragen. Das ist aber genau das Charakteristikum des Coulomb-Potentials (vgl. Kap 5.4.2). Der Streuwirkungsquerschnitt z.B. wird dann $d\sigma/d\Omega \propto |f|^2 \propto (\Delta p)^{-4} \propto \sin^{-4}(\vartheta/2)$, wie beim Rutherford-Versuch. Damit auch quantitativ das gleiche herauskommt wie in Kap. 5.4, muss die Kopplungskonstante $g = \sqrt{\alpha}$ gesetzt werden, und die

²⁸Im Fall $\Psi_{\text{ini}} = \Psi_{\text{fin}}$ ergibt die gleiche Formel (9.15) die durch $\hat{H}_{WW}\hat{H}_{WW}$ bewirkte Energieverschiebung ΔE des Niveaus E_{ini} .

²⁹Hier sieht man deutlich, wie die 2. störungstheoretischer Näherung von denjenigen Zuständen ausgeht, die der Störoperator in 1. Näherung aus den Zuständen der Nullten Näherung hervorbringt.

³⁰Da nicht nur einer sondern zwei Operatoren die Plätze wechseln, ändert sich das Vorzeichen dieser zweiten Übergangsamplitude auch für Fermionen nicht.

Feinstrukturkonstante $\alpha = (e^2/4\pi\epsilon_0)/\hbar c = 1/137.037\dots$ erweist sich endgültig als der charakteristische Parameter für die Stärke der elektromagnetischen Wechselwirkung.

Fazit: Die Rechnung mit dem Austausch virtueller Photonen stimmt vollständig mit den bekannten Folgen eines Coulomb-Felds überein. Fermi hat dies 1931 alles als erster ausgerechnet [2], nicht nur für den Fall der Streuung freier Teilchen sondern auch für lokalisierte Teilchen in Ruhe. Für die elektrostatische Energie erhielt er dabei genau das Coulomb-Potential, einschließlich des durch die Ladungen bestimmten Vorzeichens.

Identische Teilchen. Ein kurzer Seitenblick auf die identischen Teilchen, deren eigentümliches Verhalten wir bisher noch ignoriert haben. Seit Kap. 5.7 wissen wir, dass in diesem Fall auch die Rutherford-Formel nicht mehr stimmt, sondern durch Interferenzterme zwischen den beiden aufeinander einwirkenden Teilchen ergänzt werden muss. In der neuen Berechnungsweise mit der störungstheoretischen Summe (Gl. 9.15) ergibt sich das von selbst. Bei verschiedenen Teilchen A und B sind als intermediäre Zustände mit einem virtuellen Photon nur $|A, B'\rangle$ und $|A', B\rangle$ möglich, bei identischen Teilchen auch die beiden Zustände $|A, A'\rangle$ und $|B, B'\rangle$, denn es kann ja mit gleichem Ergebnis das Elektron von B in A' , und das von A in B' übergegangen sein. An Stelle der intermediären Photonen mit Impulsen $\Delta\vec{p} = \pm(\vec{p}_{A'} - \vec{p}_A)$ sind dann Photonen mit $\Delta\vec{p}_{exch} = \pm(\vec{p}_{B'} - \vec{p}_A)$ ausgetauscht worden. Daher tragen in Gl. (9.15) weitere zwei Summanden bei. Hieraus entsteht automatisch die kohärente Überlagerung der Streuamplitude von Target und Projektil, wie in Kap. 5.7 mit Begriffen der einfachen Wellenmechanik dargestellt. Die beiden zusätzlich zuständig gewordenen Operatoren in der Doppelsumme $\hat{H}_{WW}\hat{H}_{WW}$ unterscheiden sich von den beiden früheren nur dadurch, dass die beiden Erzeugungsoperatoren $\hat{a}_{A'}^\dagger$ und $\hat{a}_{B'}^\dagger$ die Plätze vertauscht haben. Da dies bei Fermionen gleichbedeutend mit einem Vorzeichenwechsel ist (s. Kommutator 9.3), wird schon dadurch die Amplitude f zu einer kohärenten *Differenz* aus zwei Gliedern (bei Bosonen: Summe), und es kommt am Ende die richtige Winkelverteilung heraus, als ob man mit den (anti-)symmetrisierten Wellenfunktionen von Kap. 5.7 gerechnet hätte.

Klassisches Feld? Das ganze ermöglicht nun eine fundamentale Umdeutung der klassischen Begriffe von Kraftfeld und Potential. Als grundlegend erscheint die Fähigkeit der Elektronen, Photonen zu erzeugen und zu vernichten (nichts anderes steht im Wechselwirkungsoperator 9.11 explizit drin). Das klassisch bekannte Coulombsche Kraftfeld bzw. elektrostatische Potential ergibt sich dann aus der Quanten-Feldtheorie schon von selbst.

Frage 9.3 *Aber: die Coulomb-Kraft wird doch nicht wirklich durch hin- und her fliegende Photonen erzeugt, oder? Die hätte man doch mal beobachten müssen?*

Antwort 9.3 *Völlig richtig. Auch in der obigen Darstellung fliegen die Photonen nicht wirklich, sondern treten nur in der Formel für Übergänge (und Verschiebung der Energieerwartungswerte) auf, soweit die elektromagnetische Wechselwirkung dafür verantwortlich ist. Da sich aber so anschaulich mit diesen Photonen argumentieren lässt, übersetzt man das "nicht wirklich" ins Latein und nennt sie: "virtuelle Photonen" oder "Photonen in virtuellen Zuständen".*

Dabei haftet den virtuellen Photonen keinerlei Mangel an, wenn man von der Verletzung der für reelle Photonen gültigen Energie-Impuls-Beziehung absieht. Die Erzeugungs- und Vernichtungs-Operatoren machen nämlich keinen Unterschied zwischen ihnen.

Compton-Effekt und Erzeugung reeller Photonen. Dies kann man z.B. am Compton-Effekt sehen, der auch in der großen Doppelsumme für $\hat{H}_{WW}\hat{H}_{WW}$ mit Gliedern nach Gl. (9.14) steckt, nur dass man sich jetzt auf das Produkt anderer Summanden konzentrieren muss. Es müssen ja ein Elektron A und ein Photon $p_{\gamma 1}$ erst vernichtet und dann (in anderen Zuständen ($B, p_{\gamma 2}$)) neu erzeugt werden:

$$\hat{H}_{Compton} = \hat{H}_{emission} \hat{H}_{absorption} = \hat{a}_B^\dagger \hat{a}_C \hat{c}_{p_{\gamma 2}}^\dagger \hat{a}_C^\dagger \hat{a}_A \hat{c}_{p_{\gamma 1}} \quad (9.17)$$

Zwei der vier Elektronen-Operatoren müssen folglich die Indizes A bzw. B tragen, und die Indizes der beiden anderen müssen einander gleich sein, damit dieser ganze Operator nicht stets Null ergibt. Denn

es muss das im ersten Schritt erzeugte Elektron \hat{a}_C^\dagger sein (Operatorenprodukte von rechts lesen!), was im zweiten Schritt vernichtet wird (\hat{a}_C). Dies Elektron ist hierbei das intermediäre Teilchen, das nur auf dem Papier existiert und einen virtuellen Zustand C einnehmen darf (und muss). Es überträgt Energie und Impuls der beiden vernichteten auf die beiden neu erzeugten Teilchen und man beachte, dass es immer die selben Operatoren sind wie oben bei der Coulomb-Streuung, die in diesen Formeln je nach den Umständen reelle oder virtuelle Teilchen – seien es Elektronen oder Photonen – erzeugen und vernichten.

Allerdings muss wieder gesagt werden, dass die Darstellung hier in vielem vereinfacht ist. Die mit den Messungen so gut übereinstimmenden Ergebnisse kommen erst heraus, wenn man für die Elektronen statt der schlichten Wellenfunktion den 4-komponentigen Dirac-Spinor ansetzt (s. Kap. 10.2), und auch alle virtuellen Zustände negativer Energie mitnimmt. Dann sind Spin und magnetische Wechselwirkung und vor allem die Möglichkeit von Antiteilchen schon automatisch mit berücksichtigt. Überflüssig zu sagen, dass hieraus die Klein-Nishina-Formel für Wirkungsquerschnitt und Winkelverteilung der Photonen folgt, die erste, die exakt mit den Messungen am Compton-Effekt übereinstimmte (Kap. 6.4.3), was seinerzeit (1928) mit erheblichem Gewicht dafür sprach, dass man die in Diracs Theorie unvermutet aufgetauchten Zustände negativer Energie nicht ignorieren sollte. Mit dieser Erweiterung kommt auch für gestreute Elektronen die Winkelverteilung gegenüber der Rutherford-Formel etwas modifiziert heraus (*Mott-Streuung*), genau so wie sie mit wirklichen Elektronen auch wirklich beobachtet wird.

Auch ohne virtuelle Austausch-Teilchen? Auch die Quantisierung des Maxwell-Felds sieht im Einzelnen komplizierter aus als oben vorgestellt: Nur wenn man sie streng relativistisch durchrechnet (*Lorentz-Eichung* $\text{div}\vec{A} - \partial\Phi/\partial t = 0$), ergeben sich auch die Feldquanten, die das Coulomb-Feld “machen”. Es sind Photonen, die longitudinal polarisiert oder sogar skalar sind, also als freie (transversale) elektromagnetische Wellen wirklich nicht vorkommen können.

Häufig wird in Lehrbüchern und Original-Arbeiten stattdessen die *Coulomb-Eichung* $\text{div}\vec{A} = 0$ benutzt, die diese Photonen von vornherein ausschließt. Dann muss man im Hamilton-Operator das elektrostatische Potential $\Phi(\vec{r}, t)$ extra aufführen, wie früher. Dass man bei der Elektrodynamik diese zwei gleichwertigen Konzepte nutzen kann, ist aber eher die Ausnahme. Als das grundlegende von beiden ist das Konzept der Wechselwirkung der elementaren Teilchen durch Austausch von virtuellen Bosonen anzusehen, denn es hat sich auch in der Schwachen und der Starken Wechselwirkung bewährt, wo das Potential ein nur noch näherungsweise brauchbarer Begriff ist (s. Kap. 12 und 13).

Pferdefuß. Es kann als ein großer Erfolg der Modernen Physik gelten, auf diese Weise das Kraft-Feld, einen der grundlegenden Begriffe der klassischen Physik, neu zu verstehen. Dennoch vergingen bis zur breiteren Anerkennung weitere 20 Jahre, denn diese Erklärung war mit gravierenden Inkonsistenzen erkaufte. Eine von ihnen liegt auf der Hand: Von der Störungstheorie wurden bisher nur einige der Glieder der 2. Ordnung betrachtet, der niedrigsten, die überhaupt ein Resultat bringt. Es wäre aber unlogisch, nicht auch nach den anderen Gliedern und denen der höheren Näherungen zu fragen. Ob deren Beiträge klein ausfielen oder groß – in jedem Fall wäre das gute Zwischenergebnis gefährdet. Tatsächlich stellten sich diese Beiträge schon sehr bald als unendlich groß heraus.

Eine Ursache hierfür ist an der entsprechenden Fortsetzung der Taylor-Entwicklung der Schrödinger-Gleichung (9.13) über das quadratische Glied hinaus zu erkennen. Bei höheren Näherungen bekommt man es mit höheren Potenzen der Absorptions- und Emissions-Operatoren zu tun, also mit der Möglichkeit von noch mehr und komplizierteren virtuellen Zwischenzuständen. Zusammenfassend werden sie *Strahlungs-Korrekturen* genannt. Die Vielfach-Integrale, die bei ihrer Berechnung vorkommen, divergieren. Doch auch schon in der 2. Ordnung tauchten unendliche Resultate auf, wenn man nach Gl. (9.15) die Strahlungskorrektur für die Energie eines ruhenden Elektrons oder sogar nur des Vakuumzustands ausrechnet. Ungeachtet der Sinnlosigkeit solcher insgesamt unendlicher Zahlenwerte zeigte sich an einzelnen Summanden der divergierenden Formeln, dass sich die Strahlungskorrekturen auf verschiedene Zustände unterschiedlich auswirken, also zu möglicherweise beobachtbaren Verschiebungen oder Aufspaltungen von Energie-Niveaus führen **könnten**. Dies war ein Ansporn zu immer genaueren Messungen am theoretisch wie experimentell am besten zugänglichen System, dem H-Atom. 1946 wurden auf der ersten, nur dreitägigen Physiker-Konferenz nach dem 2. Weltkrieg in den USA gleich zwei Beobachtungen vorgestellt, die solche Abweichungen von der

bisherigen Theorie zeigten. Es begann eine fieberhafte Suche nach den geeigneten Methoden, aus den divergierenden Integralen genau die Anteile heraus zu filtern, die diese neuen Ergebnisse richtig wiedergaben. Dafür wurde auch eine intuitive graphische Sprache entwickelt: die im folgenden Abschnitt beschriebenen Feynman-Diagramme. Sowohl die bald erzielte Präzision bei der Erklärung der beobachteten Anomalien als auch die Anschaulichkeit ihrer Bildersprache waren sensationell und machten die Quanten-Elektrodynamik schnell berühmt.

9.7 Feynman-Graphen

Für die Wechselwirkungsprozesse in der Quanten-Feldtheorie gibt es seit 1950 eine exakte Bildersprache, die Feynman-Graphen oder Feynman-Diagramme. Sie sind so anschaulich, dass man schon den Ablauf des Prozesses darin zu erkennen glaubt, obwohl sie genau genommen nur die Operatoren $\hat{H}_{emission}$ und $\hat{H}_{absorption}$ und alle ihre möglichen Produkte graphisch darstellen. Mit Hilfe einfacher Regeln (den "Feynman-Regeln", s.u. Kap. 9.7.5) kann aus diesen Diagrammen auch die vollständige Formel für die betreffende quantentheoretische Übergangsamplitude abgelesen werden, und dies in jeder störungstheoretischen Ordnung.

9.7.1 Elementare Prozesse

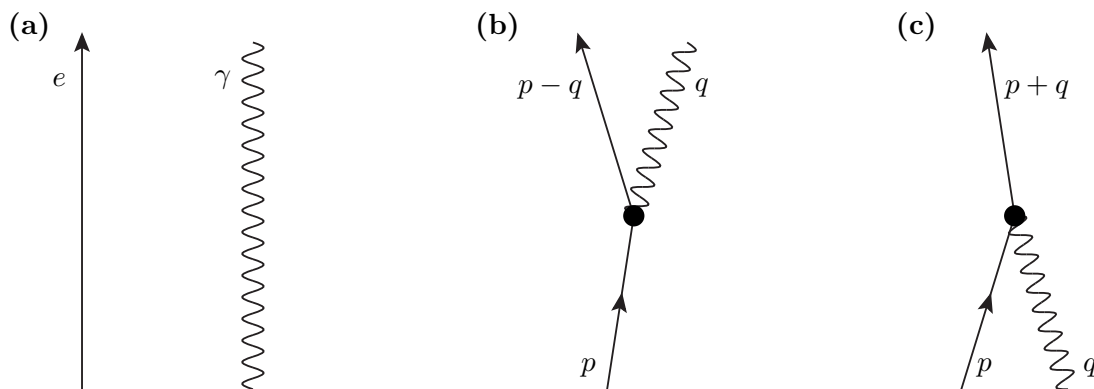


Abbildung 9.1: Die einfachsten Feynman-Diagramme. Der Zeitverlauf ist von unten nach oben zu denken, d.h. unten ist der Anfangszustand, oben der Endzustand.

(a) Die Diagramme der ungestörten Zustände ("Nullte Ordnung Störungstheorie"): Eine gerade Linie repräsentiert ein Elektron (allgemein: ein Fermion) in einem bestimmten Zustand, eine Wellenlinie ein Photon.

(b) Emission: Der dicke Punkt – *Vertex* – symbolisiert eine Wechselwirkung. Das Elektron p erzeugt ein Photon q und geht dabei in ein Elektron $p - q$ über.

(c) Absorption: Das Elektron p absorbiert im Vertex ein Photon q und geht dabei in ein Elektron $p + q$ über.

Die letzten beiden Diagramme gehören zur Störungstheorie 1. Ordnung. Die Indizes $p \pm q$ sollen an die Nebenbedingung der Erhaltung von Energie und Impuls erinnern.

Zunächst in Abb. 9.1a die Symbole für die beiden Arten von Teilchen in einem ihrer stationären ungestörten Basiszustände. Welcher der Zustände gemeint ist, wird oft durch einen Index p bzw. q angegeben, der bei freien Teilchen immer den Impuls (genau genommen, den 4er-Impuls ($E/c, \vec{p}$) etc.) und gegebenenfalls auch alle anderen inneren Quantenzahlen enthält, z.B. für den Spin. Die beiden Diagramme (b) und (c) stehen für die elementaren Prozesse der elektromagnetischen Wechselwirkung. (b) zeigt den Feynmangraph für $\hat{H}_{emission} = \hat{a}_{p-q}^\dagger \hat{a}_p \hat{c}_q^\dagger$. Das einlaufende Elektron (p) erzeugt im Vertex (\bullet) ein Photon (q) und fliegt im Zustand ($p - q$) weiter. (c) zeigt den Feynmangraph für $\hat{H}_{absorption} = \hat{a}_{p+q}^\dagger \hat{a}_p \hat{c}_q$. Symbolisiert wird die Reaktion eines einlaufenden Elektrons (p) mit einem einlaufenden Photon (q). Im Vertex wird das Photon absorbiert, das Elektron läuft mit Impuls ($p + q$) aus. Die Diagramme sollen von unten nach oben gelesen

werden: Unten sieht man den Anfangszustand, am *Vertex*-Punkt den Prozess oder die Wechselwirkung, und oben das Resultat.³¹

Dies sind die beiden Graphen 1. Ordnung (weil sie genau 1 Vertex enthalten). Da in der Wirklichkeit die Impuls- oder Energie-Erhaltung verletzt wäre, wenn alle drei hinein- oder herauslaufenden Linien gleichzeitig reellen Teilchenzuständen entsprechen sollen, werden diese Prozesse 1. Ordnung in der Natur nicht isoliert beobachtet. Das Entstehen und Vergehen eines virtuellen Teilchens aber, wie es in den geeigneten Produkten von zwei Wechselwirkungsoperatoren vorkommt (z.B. Gln. 9.14, 9.17), kann einfach dadurch symbolisiert werden, dass zwei solcher Graphen an ihrem virtuellen Teilchen miteinander verbunden werden. So ergeben sie einen Graph 2. Ordnung (2 Vertices) mit einer *inneren Linie*.

9.7.2 Elektron-Elektron-Wechselwirkung (virtuelles Photon beteiligt)

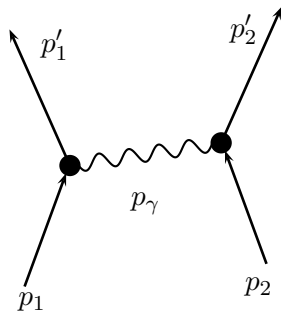


Abbildung 9.2: Das Photon hat eine *innere Linie*.

Sie erstreckt sich von einem Vertex zum anderen und charakterisiert das Austausch-Teilchen in seinem virtuellen Zustand, wo die Bedingung $E_\gamma = c\vec{p}_\gamma$ ungestraft missachtet werden darf. Sein Impuls und seine Energie erfüllen die Erhaltungssätze an jedem Vertex, $\vec{p}'_1 - \vec{p}_1 = \vec{p}_\gamma = \vec{p}_2 - \vec{p}'_2$ und $E'_1 - E_1 = E_\gamma = E_2 - E'_2$. Nur die oben und unten in das Diagramm hinein- oder aus ihm herauslaufenden *äußeren Linien* müssen reellen Teilchen entsprechen!

Das Photon überträgt auf der inneren Linie genau die Energie und den Impuls auf das zweite Teilchen, die es vom ersten Teilchen erhalten hat. Die Neigung der Photonen-Linie deutet an, dass es erst vom Teilchen p_1 erzeugt und dann vom Teilchen p_2 absorbiert wurde. Natürlich muss man für die Berechnung auch die Übergangsamplitude desjenigen Diagramms berücksichtigen, in dem das Photon den umgekehrten Weg nimmt, mit entgegengesetzt großem Energie- und Impuls-Übertrag, um den selben Endzustand herbeizuführen. In der Praxis werden solche Paare von Feynman-Graphen daher in einem einzigen mit einer horizontalen Wellenlinie für das Austauscheteilchen zusammengefasst. Mit diesem Diagramm kann man nicht nur die Streuung von geladenen Teilchen aneinander berechnen, sondern auch – bei zwei Ladungen mit verschiedenem Vorzeichen – ihre gebundenen Zustände, also z.B. das H-Atom.

Wenn man im Diagramm die Indizes p'_1, p'_2 vertauschen würde, hätte man im Fall identischer Teilchen denselben Endzustand. Die zu diesem *Austausch*-Diagramm gehörende Übergangsamplitude muss durch kohärente Überlagerung berücksichtigt werden, das sichern die Feynman-Regeln, die bei Fermionen auch das richtige Minus-Zeichen ergeben (vgl. oben und Kap. 5.7).

9.7.3 Elektron-Photon-Wechselwirkung (virtuelles Elektron beteiligt)

Als drittes Beispiel realer Prozesse wird in Abb. 9.3 der Compton-Effekt dargestellt, also die Streuung von Elektronen und Photonen aneinander.

9.7.4 Photonen-Emission (virtuelles Elektron und virtuelles Photon beteiligt)

Abb. 9.4 zeigt den einfachsten Graphen für den Prozess, der am Anfang der ganzen Konstruktion stand, die Erzeugung eines (reellen) Photons (p_γ). Der Prozess muss deshalb so kompliziert konstruiert werden, weil die beiden Teilchen im Endzustand beobachtbar, also reell sind, und folglich im letzten Vertex mit einem virtuellen Teilchen verbunden sein (“gekoppelt”) sein müssen. Dieses kann nur durch eine vorhergehende Wechselwirkung mit einem weiteren Feld entstanden sein, hier durch das Feld eines anderen Teilchens (p_2). – Ein elementares Teilchen allein kann eben kein Photon emittieren (s. auch Kap. 6.4).

³¹In manchen Büchern ist der Zeitverlauf in den Feynman-Graphen von links nach rechts.

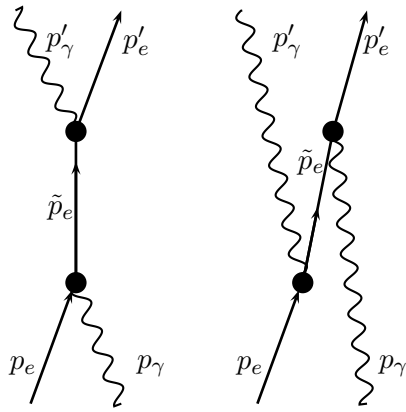


Abbildung 9.3: Compton-Effekt: Zwei Feynman-Diagramme vom selben Anfangszustand (p_e, p_γ) zum dem selben Endzustand (p'_e, p'_γ) . Beide Amplituden müssen addiert werden. Das Elektron durchläuft einen virtuellen Zustand \tilde{p}_e .

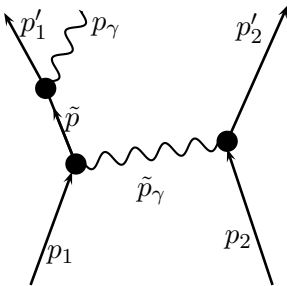


Abbildung 9.4: Erzeugung reeller Photonen (sowohl für Zusammenstoß zweier Elektronen – Bremsstrahlung –, als auch im gebundenen System aus einem angeregten Zustand heraus). Photonen-Emission ist also ein Prozess 3. Ordnung und benötigt mindesten 2 Teilchen. Auch hier gibt es mehrere äquivalente Diagramme zu berücksichtigen.

9.7.5 Feynman-Regeln

Einfaches Rezept. Die Feynman-Regeln, mit denen man die Graphen in die Formeln zur Berechnung der Übergangsamplitude übersetzt, sehen in einfachster Näherung ausgedrückt wirklich simpel aus (zur nächst genaueren Stufe der Formulierung s. z.B. [4, Kap. 6.3]):

1. Jeder Vertex bringt den Faktor *Kopplungskonstante* g und eine δ -Funktion, die bei der späteren Integration die Erhaltung von Energie und Impuls erzwingt.
2. Jede innere Linie bringt einen Faktor namens *Feynman-Propagator* $[E^2 - (p^2c^2 + m^2c^4)]^{-1}$. (Darin m, E, p für das Austauscheteilchen in seinem virtuellen Zustand. Für Teilchen in reellen Zuständen wäre der Propagator unendlich, aber hier gilt ja $E^2 \neq p^2c^2 + m^2c^4$!)
3. Zum Schluss wird über alle unbeobachteten Variablen integriert (z.B. über E, p der virtuellen Teilchen).

Das ergibt schon das Übergangsmatrix-Element zum Einsetzen in die Goldene Regel (Gl. 6.10). Vom Propagator bleibt wegen der δ -Funktionen nach der Integration dabei nur ein einfacher Faktor übrig, der **Energie-Nenner**:

$$[(\Delta E)^2 - ((\Delta \vec{p})^2 c^2 + m^2 c^4)]^{-1} \tag{9.18}$$

Darin ist m die Masse des Austauscheteilchens und ΔE und $\Delta \vec{p}$ die wirklichen Überträge von Energie und Impuls zwischen den beiden reellen wechselwirkenden Teilchen.

Feynman-Propagator. Der Feynman-Propagator (oder einfach Propagator) ist zu einem Schlüsselbegriff zur Beschreibung einer Wechselwirkung geworden, z.B. für die Form und Reichweite der wirkenden Kraft. Man sieht das schnell bei der Winkelverteilung nach einem elastischen Stoß, weil dann (im Schwerpunktsystem) $\Delta E = 0$ festliegt und bei Beobachtung unter einem bestimmten Winkel ϑ auch $\Delta \vec{p}$ nur einen

bestimmten Wert haben kann: $|\Delta\vec{p}| = 2p \sin(\vartheta/2)$ (siehe Abb. 3.7 in Kap. 3). Bis auf konstante Faktoren (die Kopplungskonstanten) gibt also der Propagator selbst schon die Streuamplitude $f(\Delta p)$ an, die wir (in Gl. 5.10) als die Fourier-Transformierte des wirkenden Potentials kennen gelernt haben.

Zwei Beispiele sind hier von grundlegender Bedeutung:

- Erfolgt die Wechselwirkung durch ein masseloses Austauschteilchen, ist in Gl. (9.18) $m = 0$, und folglich $f(\Delta p) \propto 1/(\Delta p)^2$. Das war (in Kap. 5.4.2, Gl. 5.14) gerade für den Rutherford-Versuch, also Streuung an einem Coulomb-Potential, herausgekommen.
- Erfolgt die Wechselwirkung durch ein massives Austauschteilchen, ist $m > 0$, und aus Gl. (9.18) folgt

$$f(\Delta p) \propto 1/((\Delta p)^2 + m^2 c^2). \quad (9.19)$$

Das war (in Kap. 5.4.2, Gl. 5.13) gerade für die Streuung an einem abgeschirmten Coulomb-Potential herausgekommen, wenn dessen Reichweite-Parameter $a = \hbar/mc$ gesetzt wird. (Das ist – nicht zufällig – die zur Masse m gehörende Compton-Wellenlänge, s. Kap. 6.4.3, Gl. 6.27).

In dieser Argumentation deutet sich an, wie die Formeln der Quanten-Elektrodynamik sich modifizieren lassen und dann Wechselwirkungen beschreiben können, die scheinbar ganz andere Eigenschaften haben: die Schwache und die Starke Wechselwirkung.³²

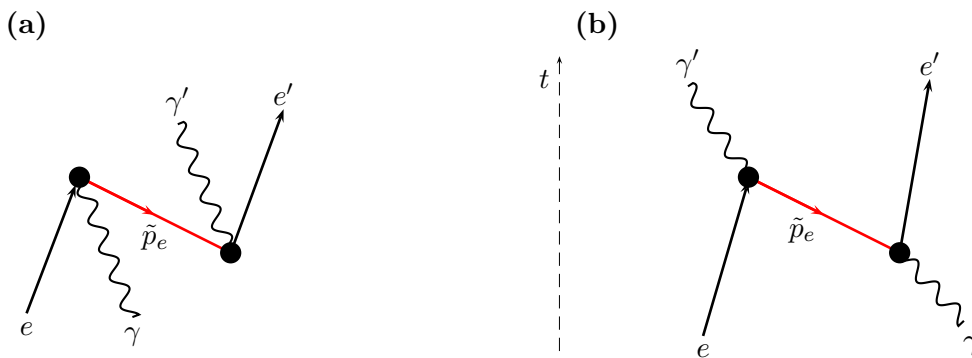


Abbildung 9.5: Feynman-Diagramme für den Compton-Effekt $\gamma + e \rightarrow \gamma' + e'$ mit Einschluss virtueller Antiteilchen. Der rote Teil der Fermionen-Linie bedeutet ein in der Zeit *vorwärts* laufendes Positron in einem virtuellen Zustand. Nur wenn auch solche Bilder (nach den Feynman-Regeln in Formeln übersetzt) mitgerechnet werden, wird Übereinstimmung mit den Experimenten erreicht.

(a) Der links dargestellte Prozess beginnt im früheren Vertex (s. Zeitpfeil t) mit einer **Vakuum-Fluktuation**, der spontanen Erzeugung eines Elektrons e' , eines Photons γ' und eines Positrons aus dem Nichts. Elektron und Photon bilden den beobachteten Endzustand des Compton-Prozesses. Das (virtuelle) Positron vernichtet sich im späteren Vertex mit den beiden einlaufenden Teilchen e und γ .

(b) Der Prozess beginnt mit der Erzeugung eines Elektron-Positron-Paars durch das einlaufende reelle Photon γ . Im späteren Vertex vernichtet sich das (virtuelle) Positron mit dem einlaufenden Elektron e , wobei ein(!) Photon γ' entsteht.

Höhere Näherungen. Die oben gezeigten Beispiele einfacher Graphen sind leicht durch kompliziertere – vor allem aufgrund größerer Anzahl von Vertices – zu erweitern. Zur Berechnung der gesamten Übergangsamplitude von einem (vorgegebenen) Anfangs- zu einem (vorgegebenen) Endzustand müssen grundsätzlich *alle* erdenklichen Graphen berücksichtigt werden, die diese beiden Zustände miteinander verbinden. Dazu gehören sogar auch solche Graphen, wo ein einzelnes Elektron zwischendurch sein selbst

³²Siehe z.B. in Kap. 11.1.1, wie sich aus dieser Beobachtung die Yukawa-Hypothese zur kurzreichweitigen Kernkraft entwickelt.

erzeugtes virtuelles Photon wieder einfängt. Anfangs- und Endzustand selbst müssen natürlich reellen Teilchen entsprechen, alles dazwischen darf (oder muss sogar) virtuell sein.

Eine Warnung. Ein Feynman-Graph lässt in verführerischer Anschaulichkeit den physikalischen Prozess aussehen wie ein Bild von Trajektorien mit Wechselwirkungen an wohlbestimmten Orten und Zeiten. Aber Vorsicht: Jede Linie vertritt eine in Ort und Zeit unendlich ausgedehnte ebene Welle, und für die Berechnung muss über alle Örter, Zeiten und mögliche Reihenfolgen der Vertices integriert werden. Zum Beispiel heißt das für die beiden Diagramme zum Compton-Effekt in Abb. 9.3, dass sie auch in den Formen mitgezählt werden müssen, in denen die beiden Vertices ihre zeitliche Reihenfolge umgekehrt haben (s. Abb. 9.5).

9.7.6 Antiteilchen

Wenn Teilchen rückwärts laufen. In Abb. 9.5 scheint das Elektron in seinem virtuellen Zwischenzustand gegen die normale Zeitrichtung zu laufen. Das kann aber auch anders gedeutet werden: Da in der Schrödinger-Gleichung die Größen E und t immer im Produkt vorkommen, kann das negative Vorzeichen der Zeit ersatzweise als negative Energie dieses Zwischenzustands gesehen werden. Dass es solche Zustände negativer Energie geben könnte, war von Dirac in der relativistischen Quantenmechanik schon 1928 entdeckt worden (s. auch Kap. 6.4.3 und 10.2). Um zu erklären, warum nicht alle Elektronen in diesen tiefer liegenden Zuständen verschwänden, erfand er (1930) die vollbesetzte Unterwelt und fand heraus, dass man einzelne unbesetzte Zustände darin als Antiteilchen bemerken würde. Tatsächlich stellte sich um 1950 heraus, dass man auf dies Bild besser verzichtet und stattdessen – auf Feynmans Vorschlag – die Antiteilchen als eigene Teilchensorte einführt, deren mögliche Zustände sich durch die Spiegelung von *Ladung, Raum und Zeit* (Operation $\hat{C}\hat{P}\hat{T}$ aus den Zuständen der Teilchen ergeben. Das wird in Kap. 10.2.6 ausführlich dargestellt. In den elementaren Wechselwirkungsoperatoren für Emission und Absorption eines Photons (Gln. 9.7, 9.8) muss man dazu die Vernichtung eines Elektrons (\hat{a}) durch die Erzeugung eines Positrons (\hat{b}^\dagger) ersetzen, und/oder analog \hat{a}^\dagger durch \hat{b} . In den Feynman-Diagrammen wird daher jedes Stück einer Fermionen-Linie mit abwärts gerichtetem Pfeil als ein Antiteilchen interpretiert, das sich mit *positiver* Energie und – entgegen dem intuitiven grafischen Symbol – in der Zeit “ganz normal” *vorwärts* bewegt.

Vernichtungsstrahlung. Damit können wir jetzt auch den Prozess der Teilchen-Antiteilchen-Vernichtung als Feynman-Diagramm zeichnen, (Abb. 9.6). Man beachte, dass die Fermionenlinie in Pfeilrichtung zusammenhängt, wobei das mittlere Stück als innere Linie einen virtuellen Zustand beschreibt, der je nach zeitlicher Orientierung von dem Teilchen oder dem Antiteilchen eingenommen wird. Da man für die Berechnung der Übergangsamplitude ohnehin beide Möglichkeiten berücksichtigen muss, findet man diese beiden Graphen fast immer gleich zu einem zusammengefasst (mit einer horizontalen inneren Linie, um jede Präferenz einer der beiden Interpretationen zu verwischen).



Abbildung 9.6: Feynman-Diagramme für Paar-Vernichtung $e^+ + e^- \rightarrow \gamma_1 + \gamma_2$. Der rote Teil der Fermionen-Linie bedeutet je nach Orientierung des Pfeils zur Zeitachse ein virtuelles Elektron bzw. Positron. In die Berechnung der Übergangsamplitude müssen beide Fälle eingehen.

Vakuum-Fluktuationen. Die beiden Graphen zur Compton-Streuung in Abb. 9.5a,b geben daher folgende Abläufe wieder:

(a) Erst verwandelt sich ein Photon γ in ein e^+e^- -Paar, wobei das Positron in einem virtuellen Zustand landet und sich danach mit dem einlaufenden Elektron in ein neues reelles Photon γ' (nur eins!) vernichtet. Dieses Photon und das reelle Elektron aus dem im ersten Schritt erzeugten Paar bilden den beobachtbaren Endzustand.

(b) Im Vakuum entstehen spontan ein Photon *und* ein e^+e^- -Paar. Das Photon und das Elektron werden als γ' und e' im Endzustand beobachtet, müssen also in reellen Zuständen sein. Virtuell ist daher wieder das Positron, welches mit den beiden einlaufenden (reellen) Teilchen γ und e den umgekehrten Prozess durchmacht, womit nun richtig alle drei verschwunden sind.

Nicht nur Teilchen in virtuellen Zuständen müssen für möglich erachtet werden, sondern also auch solche *Vakuum-Fluktuationen*, soll die Theorie zur Übereinstimmung mit den Messwerten gebracht werden. Es sei noch einmal gesagt: Die vollständigen Formeln der Störungstheorie (Integrale über Zeit und Raum) geben nur dann die experimentell gefundenen Ergebnisse wieder, wenn auch Prozesse wie die hier gezeigten mit eingerechnet werden. Man hat sich daher daran gewöhnt (gewöhnlich müssen), von ihnen so zu sprechen als ob sie *wirklich vorkämen* – aber in prinzipiell nicht isoliert beobachtbarer Form. Dass dies eines gedanklichen Kraftakts bedarf, ist schon ein Jahrzehnt vorher am ganz ähnlichen Problem des Tunneleffekts lange hin und her bewegt worden. Alle *Gedanken-Experimente*, die in Göttingen (Heisenberg, Born), Kopenhagen (Bohr) und auf vielen Konferenzen durchdiskutiert wurden, endeten damit, dass man keinen Widerspruch zu *beobachtbaren Tatsachen* konstruieren konnte. Schwierigkeiten bestanden zweifellos, aber eben nur in den Köpfen.

Gelenkige Feynman-Graphen. Die beiden elementaren Diagramme der Wechselwirkung (Abb. 9.1b, c) unterschieden sich nur in der Zeitrichtung für das Photon. Nun haben wir gesehen, dass man auch die anderen beiden Arme am Vertex nach unten oder oben klappen darf, wobei ein nach unten gerichteter Pfeil als das Erkennungsmerkmal für das entsprechende Antiteilchen zu nehmen ist. Für drei Arme in je zwei Stellungen gibt es insgesamt $2^3 = 8$ Kombinationen. In den voranstehenden Abbildungen können sechs von ihnen an den einzelnen Vertices wiedererkannt werden.

Frage 9.4 Welche zwei der acht elementaren Diagramme kommen in Abb. 9.1 - 9.5 noch nicht vor?

Antwort 9.4 Die beiden mit einem Positron als durchlaufendem Teilchen. Sie unterscheiden sich von den ersten beiden Graphen (Abb. 9.1b, c) nur dadurch, dass die Pfeile an den Elektronen-Linien nach unten weisen.

In jedem dieser acht Diagramme können die beiden Fermionen-Linien längs der Pfeile in einem Sinn durchlaufen werden, in zusammengesetzten Diagrammen daher ebenso – das entspricht exakt der Erhaltung der Fermionen-Anzahl (Teilchen minus Antiteilchen).

Ein symmetrischer Hamilton-Operator. Wegen der Symmetrie zwischen Teilchen und Antiteilchen müssen zu allen acht elementaren Diagrammen (jeweils mit gleicher Energie-Impuls-Bilanz gewählt) exakt die gleichen Übergangsamplituden gehören. Für den Hamilton-Operator der Wechselwirkung heißt die absolute Gleichwertigkeit der Prozesse mit Erzeugung bzw. Vernichtung von Teilchen bzw. Antiteilchen, dass man die gemeinsame Kopplungskonstante ausklammern und die acht Summanden so zusammenfassen kann (zur Vereinfachung einmal ohne die Indizes für die Zustände geschrieben, über die noch zu summieren ist):

$$\hat{H}_{WW} = g \left(\hat{a}^\dagger + \hat{b} \right) \left(\hat{c}^\dagger + \hat{c} \right) \left(\hat{a} + \hat{b}^\dagger \right) \quad (9.20)$$

\hat{a}^\dagger, \hat{a}	:	Erzeugung / Vernichtung eines Elektrons,
\hat{b}^\dagger, \hat{b}	:	Erzeugung / Vernichtung eines Positrons,
\hat{c}^\dagger, \hat{c}	:	Erzeugung / Vernichtung eines Photons,
g	:	Stärkefaktor für den Typ der Wechselwirkung

Beobachtbar sind diejenigen Kombinationen der elementaren Prozesse, die mit Teilchen in reellen Zuständen beginnen und enden (die unteren Anfänge bzw. oberen Enden äußerer Linien im Feynman-Diagramm). Am Pfeil (nach oben oder unten) ist zu erkennen, ob es sich dabei um Teilchen oder Antiteilchen handelt.

Konvergenz der höheren Näherungen. Alle diese Feynman-Diagramme können nach den Feynman-Regeln eindeutig zurück übersetzt werden in Formeln für die Übergangsamplitude aller möglichen Prozesse, die von der elektromagnetischen Wechselwirkung verursacht werden. Für die Berechnung einer messbaren Übergangswahrscheinlichkeit muss das Absolutquadrat der Amplitude gebildet und noch mit dem statistischen Faktor multipliziert werden, der die Zahl der im Experiment mitgezählten möglichen Endzustände bemisst (vgl. Goldene Regel, Kap. 6.1.2, Gl. 6.10). Jeder Vertex bringt (für die Amplitude) den Faktor $g = \sqrt{\alpha} = \sqrt{1/137.037\dots} \approx 0.08$. Das Hinzufügen weiterer, durch innere Linien verbundener Vertices entspricht dann einfach der Berücksichtigung einer höheren störungstheoretischen Ordnung. Die Zahl möglicher Diagramme zwischen den selben Anfangs- und Endzuständen steigt mit jedem weiteren Vertex schnell an, jedoch wird der Beitrag des Graphen mit jedem zusätzlichen Faktor $g \ll 1$ kleiner³³. Die überragend genauen Ergebnisse der Quanten-Elektrodynamik kommen zu Stande, indem man z.Zt. bis etwa zur 6. Ordnung rechnet, und dabei alles, aber wirklich alles, was die Teilchen machen können (einschließlich virtueller Prozesse der Schwachen und der Starken Wechselwirkung s. Kap. 12 und 13), mitnimmt. Für das anomale magnetische Moment von Elektron und Positron ist so bereits eine 12-stellige Genauigkeit erreicht worden (s. Kap. 14.1).

9.7.7 Renormierung

Eine zweifelhafte Theorie? Mit Einführung der Antiteilchen als eigener Sorte Teilchen ist die naive Diracsche Unterwelt zwar aus den Formeln verschwunden, die Probleme aber nicht. Statt der Unterwelt voller reeller Teilchen mit Energien bis $-\infty$ und daher auch unendlicher Dichte sind es nun dieselben Teilchen in virtueller Gestalt, die in den Berechnungen von Übergangsamplituden und Energieniveaus in allen Ordnungen der Störungstheorie zu divergierenden Integralen führen. Schon die drei einfachsten Feynman-Graphen für ein einzelnes Teilchen enthalten *Schleifen*, die auf unendliche Integrale führen (s. Abb. 9.7). Wie oben erwähnt, verhinderte dieser Missstand fast 20 Jahre lang die Anerkennung der elektrodynamischen Quanten-Feldtheorie, trotz der vielversprechenden Teilergebnisse.

Abhilfe 1: "Gekonntes Ignorieren". Um diesen Unendlichkeiten beizukommen, wurde schon 1934 das mathematisch-physikalische Konzept der *Renormierung* vorgeschlagen und Ende der 1940er Jahre wesentlich von Julian Schwinger und Richard Feynman vervollkommnet (Nobelpreise 1965). Der Grundgedanke kann hier nur angedeutet werden: Die bloße *Möglichkeit* zur elektromagnetischen Wechselwirkung hat Rückwirkungen auf die Eigenschaften eines einzelnen isolierten Elektrons; die Eigenschaften eines nicht wechselwirkenden Elektrons kann man folglich eigentlich gar nicht kennen. Daher ist nicht gesagt, dass die einfache Linie für das Elektron, wenn es keine Wechselwirkung macht (Abb. 9.1a, aber auch die hinein- oder hinauslaufenden Elektronen-Linien bei den anderen Graphen), genau das Elektron bezeichnet, wie wir es kennen; diese Linien könnten ein fiktives Teilchen bedeuten, das "nackte Elektron". Es gibt aber kein Elektron, bei dem man die elektromagnetische Wechselwirkung abgeschaltet hätte um den "wahren" Wert seiner ("nackten") Masse und Ladung zu messen³⁴. Wir können ja nur "angezogene" Elektronen kennen, inmitten der von ihnen selbst oder spontan im Vakuum erzeugten Wolke virtueller Quanten um sich herum, wie sie in Abb. 9.7a und c dargestellt sind. Gemessene Werte für Masse und Ladung beziehen sich folglich nicht auf die einfache Elektronen-Linie in Nullter Ordnung Störungstheorie, sondern schließen die Beiträge solcher Graphen wie Abb. 9.7a und c mit ein, und alle dazugehörigen höheren Ordnungen (mit 4, 6, ... Vertices in beliebiger Verbindung) auch. Nun können wir aber daraus immer noch nicht auf die Eigenschaften des "nackten" Elektrons zurückschließen, denn die Berechnung der entsprechenden Integrale ergibt unendlich. Dennoch liegt die Lösung überraschend nahe, wenn man sich vergegenwärtigt, auf welchem fundamentalem Niveau der Konstruktion von Teilchen und Wechselwirkungen wir uns hier bewegen. Dann

³³sofern das Integral nicht divergiert – s. folgenden Abschnitt *Renormierung*.

³⁴Das wäre ein Widerspruch in sich: Ohne Wechselwirkung auch kein messbarer Effekt, aus dem man Masse oder Ladung ablesen könnte.

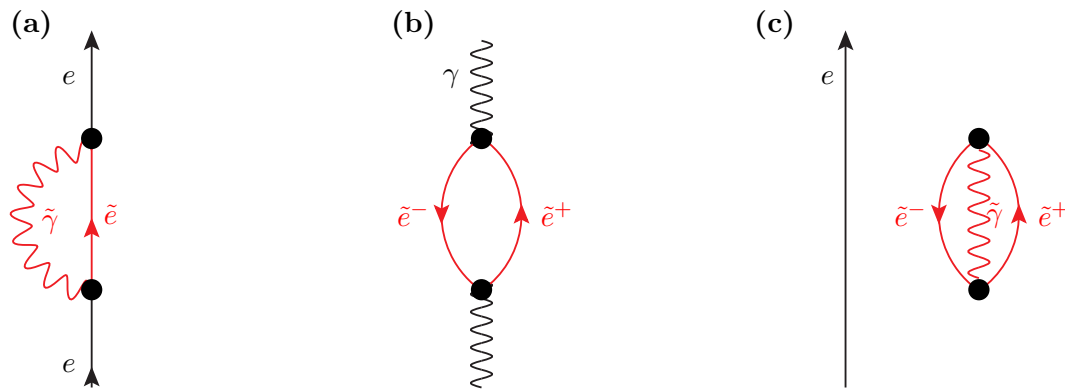


Abbildung 9.7: Die einfachsten Feynman-Diagramme für ein einzelnes Teilchen. Bei Anwendung der Feynman-Regeln führen solche *Schleifen-Diagramme* zu divergierenden Integralen.

(a) Selbstenergie (2. Ordnung): Das einzelne Elektron e geht in ein virtuelles Elektron \tilde{e} und ein virtuelles Photon $\tilde{\gamma}$ über, die sich anschließend wieder zum Elektron in seinem ursprünglichen Zustand zurückverwandeln.

(b) Vakuumpolarisation (2. Ordnung): Das einzelne Photon γ geht in ein virtuelles Elektron-Positron-Paar über, das sich anschließend wieder zum Photon in seinem ursprünglichen Zustand zurückverwandelt.

(c) Vakuum-Fluktuation (2. Ordnung): Im Vakuum entstehen spontan ein Elektron, ein Positron und ein Photon, alle in virtuellen Zuständen, und vernichten sich wieder. Das auch anwesende (reelle) Elektron e bleibt unbeeinflusst.

kann man das Problem vom Kopf auf die Füße stellen: Wenn eine isolierte Linie der Nullten Ordnung ein wechselwirkungsfreies Elektron wiedergeben soll, kann sie nicht dem wirklichen (“angezogenen”) Elektron entsprechen. Die Linien für wirkliche Elektronen müssten die Diagramme 9.7a und c bereits enthalten, und zwar in dieser 2. und allen höheren Ordnungen. All diese Diagramme braucht man demnach gar nicht mehr zu berücksichtigen, wenn man in den übrigen Diagrammen die Elektronen-Linien immer als schon angezogene Elektronen interpretiert.

Für das Photon, das nach Abb. 9.7b “zeitweilig” die Gestalt eines virtuellen Elektron-Positron-Paares annimmt, gilt das gleiche. Weil hier – wenn auch nur im virtuellen Zustand – im Vakuum elektrische Ladungen auftauchen, nennt man dies die *Vakuumpolarisation*. Der erste Schritt der Renormierung besagt folglich: Lasse einfach alle Diagramme unbeachtet, in denen Teile wie in Abb. 9.7 vorkommen. Der begriffliche Ausgangspunkt dieser Überlegung ist offenbar: Wir sind auf dem Weg zu den elementaren Prozessen der Wechselwirkung so weit vorgedrungen, dass wir deren Objekte (die Elektronen und Photonen) nicht mehr einfach als gegeben und unabhängig von ihren Möglichkeiten zur Wechselwirkung ansehen dürfen³⁵. In die fundamentale Theorie der elektromagnetischen Wechselwirkung, die wir aufstellen wollen, dürfen wir als elementaren Baustein nicht das Elektron einsetzen, wie wir es in Messungen kennen gelernt haben, denn seine messbaren Eigenschaften kommen z.T. nur so zustande, weil es diese Wechselwirkung gibt.

Abhilfe 2: “Intelligentes Abschneiden”. In Abb. 9.7b und c verbinden die Schleifen-Diagramme zwei äußere Linien, also zwei reelle Zustände. Auf solche Schleifen-Diagramme trifft man aber auch, wenn man die einfachsten Graphen für die Prozesse in Abb. 9.2-9.5 zur nächst höheren Ordnung der Störungstheorie erweitert, d.h. zwei weitere Vertices einfügt. Liegen beide Vertices in derselben äußeren oder inneren Linie, entsteht hier auch ein Schleifen-Diagramm, nur dass es an einem oder sogar beiden Enden nun selber an eine innere Linie ankoppelt. Auch dies führt nach den Feynman-Regeln zu divergierenden Integralen, also eigentlich zu unendlichen Werten. Hier muss man einen konvergenzerzeugenden Faktor einsetzen, der das

³⁵Hier kann man eine Parallele zu früheren Erfahrungen in der Atomphysik sehen: Der Einfluss des Messapparats oder des Messprozesses auf das untersuchte Objekt darf prinzipiell nicht mehr, wie in der klassischen Physik üblich, vernachlässigt werden. Schließlich bestehen die Apparate selber auch aus Atomen, und jede Wechselwirkung des einen Atoms mit dem anderen, ohne die ein Messprozess nicht vorstellbar ist, verändert den Zustand beider.

Integral *regularisiert*.

Ein schon bekanntes Vorbild ist die Regularisierung der Streuamplitude für das Coulomb-Potential in Kap. 5.4.1 mit Hilfe der Abschirmlänge a , die die Fourier-Transformierte erst berechenbar macht (Gln. 5.13 \rightarrow 5.14).

Bei der Renormierung sind *Energie und Impuls des virtuellen Teilchens* die Integrationsvariablen, und hier übernimmt z.B. eine (sanfte) Abschneide-Grenze diese Aufgabe der Regularisierung. Diese Grenze wird auch *Renormierungsskala* genannt und oft mit Λ bezeichnet. Man sucht dann nach solchen Ergebnissen oder Relationen, die von dem Wert von Λ unabhängig sind, oder die zumindest nicht divergieren, wenn man die Skala ins unendliche wachsen lässt.

Im Beispiel des Coulomb-Potentials ist der Reichweite-Parameter a die sanfte Abschneide-Grenze. Der Übergang $a \rightarrow \infty$ lässt (außer bei einer einzigen Stelle: Impulsübertrag $\Delta p = 0$) das Ergebnis “vernünftig” bleiben.

Für die fraglichen Graphen entwickelt sich bei der Integration über die unbeobachteten Impulse die Divergenz etwas unterschiedlich je nachdem es sich um virtuelle oder freie Teilchen handelt, und dieser *Unterschied* selber bleibt endlich. Er kann im Endeffekt durch eine kleine Korrektur von Ladung und Masse des Teilchens ausgedrückt werden, die nun *renormierte Ladung bzw. Masse* heißen. Insbesondere konnten die überraschenden Abweichungen von den bis dahin für exakt gehaltenen Ergebnissen der Dirac-Theorie, die mit steigender Messgenauigkeit 1946 gefunden worden waren, hiermit ausgerechnet werden: die Aufspaltung zwischen dem $2s_{1/2}$ - und dem $2p_{1/2}$ -Niveau im Wasserstoff-Spektrum (Lamb-Shift), und die Anomalie des magnetischen Moments des Elektrons. Damit war etwas gelungen, das sich bildlich gesprochen so ausdrücken lässt: Das Tor, mit dem das Inferno der Unendlichkeiten verschlossen ist, wurde einen Spalt weit geöffnet, gerade groß genug, um die wertvollen Beiträge in wohl dosierter Form herauskommen zu lassen, aber auch so schmal, so dass das Übrige nicht gefährlich werden konnte. Erst nach diesen Erfolgen gewann die Quanten-Elektrodynamik verbreitete Anerkennung. Pauli, noch in seinem Nobelpreis-Vortrag 1946 äußerst kritisch mit Theorien, die sich “hypothetische Welten” erfinden müssen, um ihre Formeln von Unendlichkeiten zu befreien, schuf 1949 das oben erwähnte relativistisch korrekte Werkzeug der Regularisierung (mit Villars, [7]). Dirac aber mochte sich nie mit dieser Entwicklung anfreunden.

Eine Theorie heißt *renormierbar*, wenn das ganze Konzept mit wenigen renormierten Parametern für alle Ordnungen der Störungstheorie gewissermaßen “auf einen Schlag” funktioniert. Dass dies in der Quanten-Elektrodynamik zum ersten Mal gelang, begründet bis heute ihre Spitzenstellung unter den Quanten-Feldtheorien.³⁶ Eine nicht renormierbare Theorie aber liefert Resultate, die von der Art und Weise des Abschneidens abhängen und deshalb niemanden überzeugen können. Noch weitere 20 Jahre lang erwiesen sich die feldtheoretischen Ansätze für die Schwache und die Starke Wechselwirkung als nicht renormierbar. Ob es außer der Quanten-Elektrodynamik weitere renormierbare Quanten-Feldtheorien überhaupt geben kann, war bis 1971 unbekannt (s. Kap. 12. 13).

9.8 Deutung der Austauschwechselwirkung

In diesem Kapitel wurde ein theoretisch anspruchsvoller Mechanismus entwickelt, um eine Wechselwirkung durch Austausch virtueller Teilchen entstehen zu lassen. Schon 1938 fand Gian Carlo Wick eine Deutung, die man umgangssprachlich formulieren kann³⁷. Wick verschiebt die Bedeutung von “virtuell” hin zu “unbeobachtbar auf Grund der Unschärfe-Relation”. Hier sein Bild: Die Erzeugung eines virtuellen Photons mit Energie E verletzt die Energieerhaltung und ist deshalb nur für Zeiten $\Delta t \simeq \hbar/E$ “erlaubt”. In dieser Zeit kann das Photon sich gerade um $r = c \Delta t = \hbar c/E$ entfernt haben, was durch simples Umstellen für die Energie $E = \hbar c/r$ und den Impuls $\Delta p = E/c = \hbar/r$ ergibt. Das entspricht einer Kraft $\Delta p/\Delta t = \hbar/(r \Delta t) = (\hbar c)/r^2$ – schon mit der charakteristischen r -Abhängigkeit des Coulomb-

³⁶Bei der Entwicklung des Verfahrens stellte sich als besonders wichtig heraus, in jedem Schritt der Rechnungen eine strikt relativistische, also lorentz-invariante Darstellung zu benutzen.

³⁷Also nicht zu wörtlich nehmen!

Gesetzes³⁸. Quantitative Übereinstimmung erhält man durch Einfügen eines (dimensionslosen!) Faktors, der die Stärke der Wechselwirkung richtig einstellt und als ein Maß für die Entstehungs- und Absorptionsrate dieser virtuellen Photonen angesehen werden könnte. Was muss man wohl als “Kopplungskonstante der elektromagnetischen Wechselwirkung” einsetzen? Natürlich die Sommerfeldsche Feinstrukturkonstante

$$\alpha = \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\right) \frac{e^2}{\hbar c} \approx \frac{1}{137.036\dots}$$

denn so wird $F(r) = \alpha \Delta p / \Delta t$ wirklich ... zum Coulomb-Gesetz für zwei Elementarladungen.

³⁸die u.a. für das Skalenverhalten des Coulomb-Gesetzes und die $1/E^2$ -Abhängigkeit aller elektromagnetischen Wirkungsquerschnitte verantwortlich ist – s. Abb. 3.5, 10.6 und 14.7.

Literaturverzeichnis

- [1] AMADO, R. D. und H. PRIMAKOFF: *Comments on testing the Pauli principle*. Phys. Rev. C, 22(3):1338–1340, Sep 1980.
- [2] FERMI, ENRICO: *Quantum Theory of Radiation*. Rev. Mod. Phys., 4(1):87, Jan 1932.
- [3] FEYNMAN, R.P., R.B. LEIGHTON und M. SANDS: *The Feynman lectures on physics*. Addison Wesley, Reading MA, 1963.
- [4] GRIFFITHS, DAVID JEFFREY: *Einführung in die Elementarteilchenphysik*. Akad.-Verl., Berlin, 1996.
- [5] HAKEN, H. und H.C. WOLF: *Atom-und Quantenphysik: Einführung in die experimentellen und theoretischen Grundlagen*. Springer, 2003.
- [6] KANITSCHIEDER, BERNULF: *Philosophie und moderne Physik: Systeme, Strukturen, Synthesen*. Wiss. Buchges., Darmstadt, 1979.
- [7] PAULI, W. und F. VILLARS: *On the Invariant Regularization in Relativistic Quantum Theory*. Rev. Mod. Phys., 21(3):434–444, Jul 1949.

³⁹(Die Seitenzahlen sollen die Kapitelnummer erkennen lassen.)

Index

- aktuelles/Änderungen
 - 2009.05.26: Logisches Problem *piv* Fußnote , 9013
 - 2009.06.04: Antisymmetrie /Austauschintegral, 9010
 - 2009.06.04: Graph Positronium-Vernichtung, 9028
 - 2009.06.04: Maiman keinen Nobelpreis, 9005
- 2. Ordnung Störungstheorie, 9019, 9020
- 2. Quantisierung, 9000, 9007
 - Operatoren statt Amplituden, 9001
- Absteige-Operator, 9007
 - Vernichtungsoperator in *QFT*, 9013
- Absurde Zwischenwerte (in Quanten-Feldtheorie), 9000
- Alltagsverstand
 - vs. Ununterscheidbarkeit, 9011
 - vs. Welle-Teilchen-Dualismus, 9004
 - vs. makroskopische Quanten-Effekte, 9012
- Anomalie
 - g*-Faktor
 - Elektron, 9000
 - am Elektron beobachtet, 9000
- Anregung, virtuelle
 - Amplitude $\propto 1/$
 - verletzt Energieerhaltung, 9018
- Antikommutator
 - für Fermionen, 9013
- Antisymmetrie
 - bei Vertauschung identischer Teilchen, 9009
- Antiteilchen, 9027
 - Anti-Gravitation?, 9008
 - CPT*-gespiegeltes Teilchen, 9027
 - für *alle* Teilchen, 9001, 9008
- Äther
 - für Wellen nicht erforderlich (1905), 9003
- Aufsteige-Operator, 9007
 - Erzeugungsoperator in *QFT*, 9013
- Ausschließungsprinzip, *siehe* Pauli-Prinzip
- Austauschteilchen
 - Masse vs. Reichweite, 9026
 - Photon, 9001
 - überträgt Impuls / wirkt wie Kraft, 9001
 - virtuelle Zustände, 9001
- Bausteine der Materie
 - Begriff revidiert, 9001
- Bilder-Sprache, 9000
- Bohr, Niels
 - gegen Photon als Teilchen, 9005
- Bohrsches Atommodell
 - versagt ab $Z > 1$, 9003
- Bose-Einstein-Kondensation, 9012
- Boson
 - Teilchenzahl darf sich ändern, 9008
- Broglie, Louis de
 - Materie-Welle (1923), 9003
- Compton, Arthur H.
 - Photon-Elektron-Stoß, 9005
 - Photonen sind Teilchen, 9003
- Compton-Effekt
 - Klein-Nishina-Formel, 9022
 - quantenfeldtheoretisch, 9021
- Compton-Wellenlänge
 - im Feynman-Propagator, 9026
- Coulomb-Eichung
 - des Maxwellfelds, schließt die virtuellen Zustände für das Coulomb-Feld aus, 9022
- Coulomb-Energie
 - verschieden je nach Symmetrie bei Teilchenvertauschung, 9011
- Coulomb-Kraft
 - Skalen-Invarianz, 9032
 - entsteht durch virtuelle Photonen, 9020
- Coulomb-Potential
 - abgeschirmtes
 - Feynman-Propagator, 9026
 - als effektive Wechselwirkung erklärt, 9017
- Denkverbote
 - identische Teilchen einzeln benennen?, 9008
- Dirac, Paul A.C.
 - Quantisierung des elektromagnetischen Felds, 9004
- Diracsche Unterwelt, 9000
 - in Quanten-Feldtheorie, 9029
 - nicht mehr Stand der Wissenschaft, 9027
- Doppelspalt-Experiment, 9000
 - populär im Welle-Teilchen-Dualismus, 9003

- effektive Wechselwirkung
 - macht klassisches Potential, 9017
- Einstein, Albert
 - A*- und *B*-Koeffizienten, 9005
 - Quanten, 9003
 - “Ausstrahlung in Kugelwellen gibt es nicht”, 9005
 - und der LASER, 9005
- Einstein-Podolsky-Rosen-Paradoxon (EPR), 9004
- Elektromagnetische Wechselwirkung, *siehe* Kap. 9
 - erste Quanten-Feldtheorie, 9000
- Elektron, 9000
- Elektron (e , e^-)
 - “angezogenes”, 9030
 - “nacktes”, 9030
 - anomaler g -Faktor $g \neq 2$, 9002
- Elementarteilchen
 - Prozesse: durch Erzeugung/Vernichtung, 9001
 - grundlegende Eigenschaften, 9008
 - ununterscheidbar, 9001, 9008
- Emission
 - induzierte, 9005
 - grundlegend für LASER, 9005
 - im Wellenbild einfach zu entdecken, 9005
 - spontane, 9005
- Energie-Impuls-Beziehung
 - reelles Teilchen, 9017
 - ungültig im virtuellen Zustand, 9001, 9019
 - verbietet Emission und Photo-Effekt an klassischen Teilchen, 9019
- Energie-Nenner
 - in Störungstheorie 2. Ordnung, 9020
- Erhaltungssatz
 - Impuls/Energie im Wechselwirkungs-Operator, 9017
 - bei Paar-Vernichtung, 9008
- Erzeugung/Vernichtung, 9000
 - bei *allen* Teilchen, 9001, 9008
 - eines Photons
 - Grundprozess der elektromagnetischen Wechselwirkung, 9016
- Erzeugungsoperator, 9013
- exakt lösbares Problem
 - in der Quanten-Feldtheorie: nein, 9002
 - in der Quantenmechanik: ja, 9007
- exponentielles Zerfallsgesetz
 - für Lichtemission, 9005
- Faraday, Michael
 - klassischer Feld-Begriff, 9016
- Feinstrukturkonstante α
 - Stärke der elektromag. Wechselwirkung, 9021, 9032
- Feld-Quantisierung, 9000
- Feldbegriff, klassischer
 - durch Quanten-Feldtheorie gedeutet, 9016
- Fermi, Enrico
 - Schwache Wechselwirkung, 9015
- Fermion
 - Teilchenzahl immer erhalten, 9008
- Feynman, Richard, 9000
- Feynman-Diagramm, 9000, 9023
 - 1. und 2. Ordnung, 9024
 - Fermionen-Linie in Pfeilrichtung durchlaufen, 9028
 - Vertex, 9024
 - elementare Prozesse, 9023
 - höherer Ordnung, 9029
 - Genauigkeit der Quanten-Elektrodynamik, 9029
 - mit virtuellem Antiteilchen, 9027
 - zeigt nicht die Trajektorien, 9027
- Feynman-Propagator, 9025
- Feynman-Regeln, 9023, 9025
- freies Teilchen, 9013, 9014
- Goldene Regel
 - Phasenraum-Faktor, 9029
- Grundzustand
 - der *QFT*: nicht das absolute Vakuum, 9002
- Häcceität (“dies und kein anderes”)
 - keine Eigenschaft der Teilchen, 9012
- Hamilton-Operator
 - Vertauschbarkeit und Erhaltungsgröße, 9012
 - für Prozesse, 9015
 - für freie Teilchen, 9014
 - freies Strahlungsfeld (Dirac 1926), 9007
 - muss sämtliche möglichen Prozesse enthalten, 9017
 - zweifache Bedeutung, 9015
- harmonischer Oszillator
 - Auf-/Absteige-Operator
 - in *QFT*: Erzeugungs/Vernichtungs-Operator, 9007
 - erstes Beispiel der Quantenmechanik (Heisenberg 1925), 9007
 - erstes Beispiel der Quantenphysik (Planck 1900), 9007
- identische Teilchen
 - gegenseitige Vertretung, 9012
 - mathematische Gleichheit, 9012
- Infinitesimal-Rechnung
 - Leibniz, 9012

- inkohärente Summe
 - Lärm, rauer Seegang, 9004
- Interferenz
 - Kriterium Welle vs. Teilchen, 9003
- intermediäres Elektron
 - im Compton-Effekt, 9022
- kinematisch vollständiges Experiment
 - beim Compton-Effekt, 9005
- Klassische Physik
 - Welle braucht ein Medium, 9003
- Klassisches Feld
 - Deutung in der Quanten-Feldtheorie, 9021
- Klein-Nishina-Formel
 - quantenelektrodynamisch, 9022
- kohärente Überlagerung
 - bei Vertauschung identischer Teilchen in der Quanten-Feldtheorie, 9021
- Kommutator
 - für Bosonen, 9013
- Komplementarität (Bohr)
 - vs. Alltagsverständnis, 9004
- Kopplungskonstante
 - elektromagnetische = Sommerfeldsche Feinstruktur-Konstante α , 9020
 - im Wechselwirkungs-Operator, 9017
- Kraft
 - durch Austauschteilchen bewirkt, 9001
- Kraftfeld
 - Deutung in der Quanten-Feldtheorie, 9021
- Lärm
 - inkohärente Summierung von Wellen, 9004
- Lamb-Shift
 - Aufspaltung entdeckt (1946), 9002
- Leibniz, Gotthold W.
 - logisches Prinzip *p*ii** doch verletzt, 9013
- Lepton
 - anomaler *g*-Faktor, 9002
- Licht
 - ist Maxwellsche Wellen *und* Newtonsche Korpuskeln, 9004
- Logik
 - Dinge ohne Häcceität?, 9012
- Lorentz-Eichung
 - des Maxwell-Felds, 9022
- Maiman, Theodore
 - LASER, 9005
- Massenpunkt
 - Bewegungsgleichung wie für Welle (de Broglie 1923), 9003
 - Prototyp für Materie (klassisch), 9004
- Materie
 - Stabilität, 9001
 - eine Manifestation von Wellen, 9001
- Materielle Teilchen
 - Quanten eines Feldes, 9001
- Maxwell, James C.
 - Maxwellsche Gleichungen
 - analog zum harmon. Oszillator, 9007
- Mechanik
 - Hamiltonsche (ab 1833), 9003
- Mikrowellen-Technik
 - Fortschritte während des Krieges, 9002
- Moderne Physik (ab ~1900)
 - Wegbereiter (Ausw.)
 - Albert Einstein, 9003–9005
- Mott, Nevill
 - e-e*-Streuung quantenelektrodynamisch, 9022
- Näherung
 - 2. Ordnung Störungstheorie, 9019
 - 6. Ordnung Störungstheorie, 9029
- Näherungslösungen
 - unumgänglich in der Quanten-Feldtheorie, 9002
- Newton, Sir Isaac
 - Korpuskulartheorie des Lichts (1700??), 9004
 - Korpuskulartheorie des Lichts (1675), 9003
- Nobelpreis
 - Vergabe versäumt, 9005
- Ortho-/Para-Helium
 - Vertauschungssymmetrie entdeckt, 9010
- Paar-Vernichtung, 9008
- parametrisches Modell
 - für Wärmestrahlung (Einstein 1917), 9005
- Pauli-Prinzip
 - in Quanten-Feldtheorie, 9014
- Photon, 9000
 - Bose-Einstein-Statistik, 9008
 - Erzeugung, 9006, 9007
 - Hamilton-Operator der Quanten-Feldtheorie, 9015
 - als Zufallsprozess (Einstein 1917), 9005
 - durch induzierte Emission (Einstein 1917), 9005
 - Plancksches Gesetz
 - Photonengas (Einstein 1917), 9005
 - Vernichtung
 - Hamilton-Operator der Quanten-Feldtheorie, 9015
 - als Zufallsprozess (Einstein 1917), 9005
 - als Teilchen betrachtet, 9005
 - intermediäres, 9019
 - skalar/longitudinal im virtuellen Zustand, 9022
 - virtuelles, 9001, 9017

- überträgt Impuls wie die Coulomb-Kraft, 9020
- Photonen-Gas
 - Einsteins Erklärung für Plancksches Gesetz, 9005
 - therm. Gleichgewicht nur mit Compton-Effekt, 9005
- Planck, Max
 - Strahlungsgesetz (1900), 9003
- Potential
 - Deutung in der Quanten-Feldtheorie, 9021
- Prinzipien
 - logisch bewiesen, trotzdem verletzt, 9013
- Produkt-Zustand
 - nur bei unterscheidbaren Teilchen, 9009, 9011
- Prozess
 - elementarer in jeder Wechselwirkung, 9001
 - nur durch Hamilton-Operator eingeführt, 9012, 9015
 - nur durch Teilchen-Erzeugung/Vernichtung, 9001
- QED*, siehe Quanten-Elektrodynamik
- QFT*, siehe Quanten-Feldtheorie
- Quanten-Elektrodynamik (*QED*), 9000
 - Genauigkeit unübertroffen, 9001, 9002, 9017
- Quanten-Feldtheorie (*QFT*), 9000, 9013
 - Grundzustand – das Vakuum, 9013
 - absurde Zwischenwerte, 9000
- Quanten-Teleportation, 9012
- Quantencomputer, 9012
- Quantensprung
 - Einstein (1917), 9005
 - in Diracs Feld-Theorie, 9007
 - in der Quanten-Feldtheorie, 9015
- Quantisierung
 - des Maxwell-Felds, 9022
- Regularisierung divergierender Integrale, 9031
- Reichweite
 - der Wechselwirkung
 - Coulomb, 9031
 - Deutung nach Wick, 9031
 - im Feynman-Propagator, 9025
 - und Masse der Austauschteilchen, 9026
- Relativitätstheorie
 - Energie-Impuls-Beziehung, 9005, 9017, 9019, 9021
 - führt Wellen im Vakuum ein, 9003
- Renormierbarkeit, 9031
 - Quanten-Elektrodynamik, 9031
- Renormierung, 9002, 9029
- Renormierungsskala, 9031
- Schleifen-Diagramm, 9029
- Seegang, rauer
 - inkohärente Summierung von Wellen, 9004
- Selbstenergie, 9002
- Singularität
 - Nullpunktsenergie, 9014
 - durch Renormierung beherrscht, 9000
- Skalen-Invarianz
 - Coulomb-Kraft, 9032
- Störoperator
 - für Emission/Absorption (Dirac 1926), 9007
- Störungstheorie
 - 0. Ordnung, 9023, 9030
 - 1. Ordnung, 9023
 - 2. Ordnung, 9019, 9020
 - nur bei Renormierbarkeit, 9031
- Standard-Modell, 9000
- statistische Schwankungen
 - der Wärmestrahlung (Einstein), 9004
- Stoß
 - elastischer
 - bei Feldquanten immer, 9016
 - im Hamilton-Operator der Quanten-Feldtheorie, 9016
- Strahlungskorrektur, 9002, 9022
 - erklärt $g \neq 2$, 9002
- Streuamplitude
 - im *QFT*-Ham.-Operator, 9016
- Super-Auswahlregel
 - (=Erhaltungssatz), 9012
- Symmetrie
 - bei Vertauschung identischer Teilchen, 9009
 - messbare Folgen für Elektronen-Energie / Schalenmodell / Chemie, 9010
- Teilbarkeit der Materie
 - Annäherung an untere Grenze, 9012
- Teilchen/Antiteilchen-Paar
 - virtuell (Vakuumpolarisation), 9030
 - virtuelles
 - in *QED*, 9029
- Teilchendichte
 - im Photonengas, 9005
- Teilchenzahl-Operator, 9014
- Triplet
 - Spin 1
 - Austauschintegral, 9011
 - Elektronen nicht am selben Ort, 9009
- Tunneleffekt
 - ähnlich einem virtuellen Zustand, 9028
- Übergangs-Operator
 - für Quantensprung, 9015
- Unschärfe-Relation

- zur Deutung virtueller Teilchen, 9002
- Ununterscheidbarkeit von Teilchen (siehe auch *identische Teilchen*)
 - Hamilton-Operator invariant bei Teilchenvertauschung, 9012
 - Hinweis auf elementare Gebilde, 9012
 - Konflikt mit der Logik, 9011
 - bei *allen* Arten Elementarteilchen, 9001
 - kommt im Alltag nicht vor, 9011
- Vakuum
 - leerer Raum kein Eigenzustand der Quantenfeldtheorie, 9002
- Vakuum-Fluktuationen, 9002
 - im Compton-Effekt, 9028
- Vernichtungsoperator, 9013
- verschränkter Zustand
 - bei zwei identischen Teilchen immer, 9009
- virtuell
 - heißt “nicht wirklich”, 9021
- virtueller Zustand, 9017
 - notwendig für Austauschteilchen, 9001
 - prinzipiell unbeobachtbar, 9001
- Wahrscheinlichkeitsdeutung
 - vs. Alltagsverstand, 9004
- Wechselwirkung
 - Elektromagnetische, 9016
 - in Quanten-Feldtheorie, 9001, 9015
 - nur durch Teilchen-Erzeugung/Vernichtung, 9001
- Welle
 - nur in einem Medium?, 9003
 - zu *Teilchen* sehr gegensätzlich, 9003
- Welle-Teilchen-Dualismus
 - Anfänge, 9003
 - Basis des Standard-Modells, 9000
 - am Licht, 9004
 - vereint 8 Gegensätze, 9003
- Yukawa, Hideki
 - Meson-Hypothese der Kernkraft
 - Feynman-Propagator, 9026
- Zustand
 - antisymmetrisch bei 2 Elektronen, 9010
- Zweite Quantisierung, *siehe* 2. Quantisierung