

Die Elementaren Teilchen in der Modernen Physik

Von Atomen, Kernen, Quanten, Quarks

Notizen und Stichworte

zu einer Vorlesung für Physikstudierende mittlerer Semester

Jörn Bleck-Neuhaus

Entwurf 10. Juni 2009 21:25

Kapitel 10

(frei zur Nutzung zum Selbststudium,
um kurze Rückmeldung an bleck@physik.uni-bremen.de wird gebeten)

Inhaltsverzeichnis

10 Das Elektron als Fermion und Lepton	10000
10.0 Überblick	10000
10.1 Spin und Magnetisches Moment: Die frühen Befunde	10001
10.2 Diracsche Elektronentheorie (1928)	10002
10.2.1 Weg zur relativistischen Wellengleichung	10002
10.2.2 Spin	10004
10.2.3 Negative Energie?	10006
10.2.4 Anomales magnetisches Moment	10007
10.2.5 Wie die Dirac-Gleichung Lorentz-invariant wird	10008
10.2.6 Anti-Teilchen.	10011
10.2.7 Chiralität	10014
10.2.8 Spin, Statistik, Symmetrie	10016
10.3 Die weiteren Leptonen	10019
10.3.1 Myonen	10019
10.3.2 Verschiedene Leptonenladungen von Myon und Elektron	10024
10.3.3 Die dritte Leptonen-Familie	10026
10.4 Neutrinos	10029
10.4.1 Neutrino-Reaktionen	10029
10.4.2 Neutrinos von der Sonne und der Supernova	10031
10.4.3 Dirac-Teilchen oder doch nicht?	10032
10.4.4 Neutrino-Oszillation	10033
Literaturverzeichnis	10035
Index	10038

1

¹(Für die weitere Bearbeitung: Die Seitenzahlen sollen die Kapitelnummer erkennen lassen. Doppelte Klammern oder Fragezeichen markieren unfertige Stellen.)

10 Das Elektron als Fermion und Lepton

10.0 Überblick

Von den *elementaren Teilchen der Materie* war das Elektron nicht nur das erste nach heutiger Ansicht richtig identifizierte, es hat auch zu der Herausbildung des Begriffs, den die Physik sich heute dazu macht, durch seine nach und nach ermittelten Eigenschaften in besonderer Weise beigetragen. Angefangen hatte dies mit den Beobachtungen seines universellen Vorkommens in aller Materie, seiner Kleinheit selbst gegenüber Atomen, seiner einheitlichen Quantisierung von elektrischer Ladung und Masse, seiner elementaren Wechselwirkung mit dem Photon im Photo- und Compton-Effekt. Nach langen Zeiten großer theoretischer Schwierigkeiten mit den Elektronen in der Atomhülle gelang 1925 der Durchbruch zur Quantenmechanik, die zu recht am Anfang oft als “Elektronen-Theorie” bezeichnet wurde. Neben einer unglaublichen Fülle dadurch gefundenener Erklärungen für weit auseinander liegende Phänomene – z.B. von der charakteristischen Röntgenstrahlung der Elemente bis zu den verschiedenen Arten der chemischen Bindung – ermöglichte das Elektron auch weiterhin den Weg zu neuen Entdeckungen. Viele waren rätselhaft und kamen als Überraschung einher. In diesem Kapitel geht es um drei von ihnen, alle um 1925 herum entdeckt, und so charakteristisch, dass sie die ganze Teilchenklasse der Fermionen definieren.¹ Ihre erfolgreiche Beschreibung in Gestalt der relativistischen Quantenmechanik stellte einen weiteren “Quantensprung” mit bleibender Bedeutung in der Modernen Physik dar:

- Das klassisch unerklärbare *Ausschließungs-Prinzip*, von Wolfgang Pauli 1925 formuliert. (Es wird oft auch als *Fermi-Dirac-Statistik* bezeichnet, wovon sich der Name *Fermion* ableitet).
- Ein halbzahliger Spin $S = 1/2\hbar$, unverträglich mit der natürlichen Einheit \hbar für den mechanischen Drehimpuls $\vec{r} \times \vec{p}$ in quantenmechanischer Deutung.
- Ein magnetisches Moment, das aus Sicht der klassischen Physik um ein mehrfaches zu groß ist: Beim Elektron (nach damaliger Kenntnis) genau um einen Faktor $g_e = 2$. (Die noch viel stärker abweichenden Momente von Proton und Neutron wurden erst Mitte der 1930er Jahre bestimmt, die %o-Abweichung von $g_e = 2$ beim Elektron erst 1946).

So wenig auch diese drei Eigenschaften miteinander verknüpft zu sein scheinen, haben sie doch eine gemeinsame Grundlage, die 1928 von Paul Dirac gefunden wurde, beim “Spielen mit Formeln”, wie er sagte [16]. Indem er lediglich das Einsteinsche Relativitätsprinzip in die Schrödinger-Gleichung der Wellenmechanik einführen wollte², war er auf die Notwendigkeit gestoßen, die mathematischen Werkzeuge noch einmal zu erweitern: Jetzt waren zur Beschreibung des Zustands eines einzigen Elektrons nicht mehr zwei sondern schon vier komplexe Wellenfunktionen nötig, zusammen als *Dirac-Spinor* bezeichnet, und die Bewegungsgleichung musste entsprechend modifiziert werden. Zur allgemeinen Verblüffung erklärte diese neue *Dirac-Gleichung* auf einen Schlag die beiden letztgenannten Anomalien des Elektrons. Einige Jahre später wurde entdeckt, dass auch die erste Eigenschaft in gewissem Sinn aus dieser Gleichung folgt: Die Antisymmetrie der Wellenfunktion bei Vertauschung zweier Teilchen, aus der sich das Ausschließungsprinzip sofort ergibt, ist notwendig, um mathematisch inkonsistente Resultate zu vermeiden. (Dies ist ein Teil des *Spin-Statistik-Theorems*.) Heute basiert die theoretische Behandlung aller fundamentalen Fermionen – das sind die Leptonen und die Quarks – vollständig auf der Dirac-Gleichung.

¹Es ließ sich in diesem Buch nicht vermeiden, die drei nun näher beschriebenen Entdeckungen mit und an Elektronen auch an früheren Stellen schon zu erwähnen oder sogar vorläufig einzuführen. Gleiches gilt für manche der späteren Entdeckungen, die ebenso weitreichende Folgen hatten – z.B. die Möglichkeit von Erzeugung und Vernichtung von Teilchen, die Existenz von Antiteilchen, die Existenz neuer Arten verwandter Teilchen (Neutrino, Myon) usw.

²Die Schrödinger-Gleichung ist eine nicht-relativistische Näherung, z.B. weil die kinetische Energie als $\hat{p}^2/2m$ auftritt.

Diese Gleichung sagte aber zugleich etwas voraus, was damals abwegig erschien: das Antiteilchen. Das bildete für einige Jahre ein gewisses Handikap für die Anerkennung der Theorie – bis sie 1932 überraschend und triumphal bestätigt wurde durch die Entdeckung des Positrons (e^+) in der Höhenstrahlung, die schon seit zwei Jahrzehnten als Quelle vieler neuartiger Erscheinungen bekannt war und damals mit Geigerzählern, Fotoplatten oder kompletten automatisierten Nebelkammern in Ballons oder hochgelegenen Labors intensiv untersucht wurde.

Indes traten zu den Rätseln, die von der Dirac-Gleichung schon mit ihrem Erscheinen gelöst worden waren, schnell neue hinzu: Insbesondere die unerwartete Existenz weiterer Teilchen, dem Elektron als Fermion eng verwandt, und überdies genauso blind gegenüber der starken Wechselwirkung. Diese Unterklasse der Fermionen wird seit 1946 unter dem Namen *Leptonen* (die “Leichten, Dünnen”) zusammengefasst.

Die Geschichte ihrer Entdeckungen begann 1930 mit der Spekulation über das elektronische Neutrino ν_e als Träger der fehlenden Energie im β -Zerfall radioaktiver Kerne, und zieht sich bis 1990 hin, als das schon lange vermutete Tau-Neutrino ν_τ experimentell nachgewiesen wurde. Dazwischen liegen die überraschenden Entdeckungen zweier geladener Leptonen: 1937 das Myon μ^\pm als Komponente der Höhenstrahlung, zuerst als *das* Teilchen der starken Wechselwirkung laut begrüßt und erst 10 Jahre später in seiner Natur als Lepton erkannt, und 1974 das Tauon τ^\pm in Experimenten am Hochenergiebeschleuniger (das fast doppelt so viel wiegt wie ein Proton und deshalb den Gattungsnamen “Lepton” Lügen straft). Dass zu jedem geladenen Lepton ein eigenes Neutrino gehört, wurde 1962 durch den Nachweis der Verschiedenheit von elektronischen und myonischen Neutrinos ν_e, ν_μ gezeigt.

Wegen ihrer Bedeutung für die Suche nach den elementaren Teilchen werden die Leptonen schon in diesem Kapitel im Anschluss an die Dirac-Theorie behandelt, obgleich ein Teil dieser Funde zum Teil erst gemacht wurden, nachdem die Erforschung der stark wechselwirkenden Teilchen – *Hadronen* – nicht nur die Wirren des “Teilchen-Zoos” heraufbeschworen hatte, sondern diese sich in den 1970er Jahren schon wieder aufzulösen begannen. Der Grund für diese Reihenfolge ist, dass – bei allem Respekt! – die Leptonen als Elementarteilchen doch einfacher zu haben sind als die Quarks.

Die Gattung der Leptonen besteht aus drei Paaren: den elektrisch negativ geladenen Teilchen e^-, μ^-, τ^- mit ihren jeweiligen ungeladenen Neutrinos. Dazu kommen die entsprechenden sechs Antiteilchen. Sie gelten als punktförmig in jedem überprüfbareren Sinn, werden von der Starken Wechselwirkung überhaupt nicht bemerkt und unterliegen bei der elektromagnetischen und der Schwachen Wechselwirkungen exakt den gleichen und inzwischen wohlverstandenen Gesetzen³.

Über einen möglichen inneren Zusammenhang unter den Leptonen herrscht allerdings auch heute noch Unklarheit, z.B. darüber, nach welchem Gesetz sich ihre Massen bilden. Diese Situation kann man durchaus mit der Zeit vor der Entdeckung der Balmer-Formel (1885) für die Wellenlängen der Spektrallinien des H-Atoms vergleichen, denn sowohl Massen wie Wellenlängen sind Chiffren für Energien, also Eigenwerte eines Hamilton-Operators. Zur möglichen Anzahl verschiedener Leptonen hingegen gibt es einen deutlichen experimentellen Hinweis. Er wurde schon in Abb. 6.5 gezeigt: die genaue Lebensdauer des Z^0 -Teilchens (eines Bosons). Wie später in Kap. 13 und 14 zur Schwachen Wechselwirkung und zum Standard-Modell dargestellt, braucht man nach dieser Messung nicht mehr über die mögliche Existenz von weiteren Leptonen zu spekulieren⁴.

10.1 Spin und Magnetisches Moment: Die frühen Befunde

Zwei besondere Eigenschaften. Der anomale (weil halbierte) Drehimpuls und das anomale (weil verdoppelte) magnetische Dipolmoment des Elektrons wurden 1925 endgültig aus der Feinstruktur der Atompektren und dem anomalen Zeeman-Effekt herausgelesen.

Ein altberühmtes Beispiel für den halbzahligen Drehimpuls ist die geradzahlige Linienaufspaltung im gelben Licht von Natrium-Atomen, wie es von jeder Flamme ausgeht, die Spuren von Kochsalz enthält⁵. Das Licht enthält zwei Wellenlängen 589.0 und 589.6 nm. Wie beim Zeeman-Effekt im äußeren Magnetfeld kann man die Ursache der Aufspaltung in einem Magnetfeld sehen, das diesmal im Innern des Atoms

³Nur die Gravitation würde einen Unterschied zwischen ihnen machen.

⁴Es sei denn, sie hätten Massen oberhalb 45 Protonenmassen, was zumindest für eine vierte Sorte Neutrino praktisch auszuschließen sei.

⁵z.B. beim Anbraten in der offenen Pfanne auf dem Gasherd

selbst erzeugt wird. Das angeregte Elektron in *seinem* Ruhesystem sieht sich vom Na-Kern umkreist, also im Mittelpunkt einer Stromschleife. Eine geradzahlige Aufspaltung zeigt sich auch im Stern-Gerlach-Experiment (s. Kap. 7.3) an Strahlen von Atomen mit genau einem äußeren Elektron. Dass dies durch ein intrinsisches magnetisches Moment des Elektrons, gekoppelt an einen Eigendrehimpuls mit halbzahliger Quantenzahl (und deshalb *zwei* Einstellmöglichkeiten $m_s = \pm 1/2$), erklärt werden kann, wurde 1925 durch George Goudsmith und Samuel Uhlenbeck ausgearbeitet. Es sei daran erinnert (s. Kap. 7.1), dass aus der Quantisierung von $\vec{r} \times \vec{p}$ – dem (einzigem) klassischen Drehimpuls – nicht zu verstehen ist, dass es den Drehimpuls auch in halben Quanten $1/2\hbar$ gibt. Weiter war unerklärlich, dass er dann trotz seiner Halbierung dasselbe magnetische Moment $1\mu_B$ erzeugt wie $1\hbar$ klassischer Drehimpuls, was durch den Spin- g -Faktor $g_s = 2$ ausgedrückt wird. (Vgl. Kasten 7.4).

Frage 10.1 *Zwei Beispiele zur Übung: Kann sich eine Kugel von der Größe des klassischen Elektronenradius r_e so schnell drehen, dass der Spindrehimpuls klassisch herauskommt?*

Antwort 10.1 *Man kann der Kugel großzügig den Drehimpuls $m_e r_e^2 \omega$ geben (der bei keiner Massenverteilung erreicht werden kann) und setzt ihn mit $1/2\hbar$ gleich. Der klassische Elektronenradius ist $r_e = \alpha\hbar c/m_e c^2$ (s. Gl. 6.30). Für die Umfangsgeschwindigkeit am Äquator ergibt sich sofort $v = r_e \omega = c/2\alpha \approx 70c$, was mit der klassischen Physik unvereinbar ist.*

Frage 10.2 *Wie groß müsste ein Elektron denn mindestens sein, um den Spin als klassischen Drehimpuls verstehen zu können?*

Antwort 10.2 *Mit $1/2\hbar \approx m_e R^2 \omega$ für den großzügig abgeschätzten Drehimpuls und mit einer ebenso großzügigen Obergrenze $v = r_e \omega \leq c$ für die Äquatorgeschwindigkeit folgt $R \geq \hbar c/(2m_e c^2) \approx 200 \text{ MeV fm}/(2 \times 0.5 \text{ MeV}) = 200 \text{ fm}$. Ist das nicht klein genug? Bei weitem nicht: Wenn zwei solche Jumbo-Elektronen sich gerade berühren, wäre ihre Coulomb-Abstoßung nur $\alpha\hbar c/2R \leq \alpha m_e c^2 \approx 4 \text{ keV}$. Stoßversuche bei höheren Energien hätten also schon längst Abweichungen von der Rutherford- (bzw. quantenmechanischen Mott-)Formel zeigen müssen.*

Eine Erklärung für einen *Eigen*-Drehimpuls eines Teilchens, und dann noch einen *halb*-zahligen, ist weder klassisch noch aus der Schrödinger-Gleichung zu erhalten, eine für den doppelten g -Faktor auch nicht. Beides ergibt sich aber aus “einem der größten Erfolge der Physik des 20. Jahrhunderts” (Pais in [32]): der relativistischen Wellengleichung von Paul Dirac 1928, die ihm 1933 den Nobelpreis eintrug.

10.2 Diracsche Elektronentheorie (1928)

10.2.1 Weg zur relativistischen Wellengleichung

Relativistisch inkorrekt. Die Suche gilt einer relativistisch invarianten Wellengleichung. Die Schrödinger-Gleichung kann es nicht sein, weil die Ableitungen nach den vier Koordinaten (t, x, y, z) in unterschiedlichen Ordnungen vorkommen. Von einem bewegten Bezugssystem aus gesehen, d.h. nach einer Lorentz-Transformation in den neuen Koordinaten ausgedrückt, wäre dieselbe Gleichung kaum noch wiederzuerkennen. Sie würde andere Prozesse vorhersagen und damit im Gegensatz zum Relativitätsprinzip eine absolute Unterscheidung von Inertialsystemen erlauben.

Eine relativistische Wellengleichung. Ein Beispiel für relativistische Invarianz bietet die Maxwell-Gleichung für das vierkomponentige 4-Vektorpotential⁶ $\mathbf{A}(t, \vec{r}) = (A^0, A^1, A^2, A^3) = (\Phi/c, \vec{A})$:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A^\mu}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 A^\mu}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A^\mu}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A^\mu}{\partial z^2} \quad (\equiv \Delta A^\mu) \quad (10.1)$$

Sie würde nach der Lorentz-Transformation genau so aussehen. Quantenmechanisch uminterpretiert (d.h. $\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial t} = \hat{E}$, $\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x} = \hat{p}_x \dots$) ergibt sie für die möglichen Eigenwerte von Energie und Impuls $E^2/c^2 = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 = p^2$. Das ist die korrekte relativistische Energie-Impuls-Beziehung für freie Teilchen ohne Masse.

⁶Der Zusammenhang mit den Feldern $\vec{E}(t, \vec{r})$, $\vec{B}(t, \vec{r})$ ist: $\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi - \partial\vec{A}/\partial t$, $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$. Die Wellengleichung 10.1 gilt nur in Lorentz-Eichung $\partial\Phi/\partial t + \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$.

Wie aber für freie Teilchen mit Masse? Ausgangspunkt muss sein:

$$E^2/c^2 = p^2 + m^2c^2. \quad (10.2)$$

Nimmt man hierin dieselbe quantenmechanische Interpretation von E und p vor, ergeben sich überall Ableitungen 2. Ordnung. So entsteht die *Klein-Gordon-Gleichung*, die wie die Maxwellgleichung aussieht, erweitert um einen neuen konstanten Zusatzterm mit dem Quadrat der Masse. Sie ist relativistisch korrekt, aber die nähere Analyse zeigt, dass solche Materiewellen keine positiv definite Dichte haben, oder aber – was auf das gleiche hinausläuft – dass sie Teilchen mit wahlweise positiver oder negativer Ladung beschreiben.⁷

Außerdem ist vorrangig ein Operator für die Energie E gesucht, nicht für E^2 . Für Teilchen mit $m=0$, näherungsweise also auch für *alle* hoch-relativistischen Teilchen, kann man aus der klassischen Gleichung einfach die Wurzel ziehen: $E = pc$. Die Übersetzung ins Quantenmechanische verlangt dann, aus dem Operator \hat{p} für den Impulsvektor einen Operator $|\hat{p}|$ für dessen Betrag zu machen. Mit $p = \sqrt{\vec{p} \cdot \vec{p}}$ und den üblichen Differential-Operatoren ist das unmöglich.

Dirac spielt mit Formeln. Dirac stolperte 1927 beim Herumprobieren mit den neuen Paulischen Spin-Matrizen $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ über die Beziehung⁸ $(\hat{\sigma} \cdot \vec{p})^2 \equiv \vec{p} \cdot \vec{p}$ (s. Gl. 7.11) und bemerkte, dass man damit die gesuchte Wurzel ziehen konnte. Zumindest für ein masseloses Teilchen gab es nun einen linearen Hamilton-Operator für die Energie in 1. Potenz:

$$\hat{H} = (\hat{\sigma} \cdot \hat{p}) c \quad (10.3)$$

Um die Masse einzubeziehen, erweiterte er versuchsweise diese lineare Gleichung,

$$\hat{H}_D = (\vec{\alpha} \cdot \hat{p}) c + \beta mc^2, \quad (10.4)$$

(Index D für Dirac.)

und probierte, ob die vier “wildcards” $\vec{\alpha} = (\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z)$ und β so bestimmt werden können, dass sich beim Quadrieren gerade die zwei Summanden $\hat{p}^2 c^2 + m^2c^4$ richtig ergeben. Für den ersten Summanden muss $(\vec{\alpha} \cdot \hat{p})^2 \equiv \hat{p}^2$ sein, also ist $\vec{\alpha} = \hat{\sigma}$ zu wählen. Der zweite Summand erfordert $\beta^2 = 1$, und die gemischten Glieder müssen zum Verschwinden gebracht werden: $\vec{\alpha}\beta + \beta\vec{\alpha} = 0$. Die einfachste mathematische Struktur, um dies alles zu erfüllen⁹, kann durch Matrizen dargestellt werden:

$$\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & \hat{\sigma} \\ \hat{\sigma} & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ 0 & -\mathbf{1} \end{pmatrix} \quad (10.5)$$

Frage 10.3 Ist auch mit dieser Form noch $(\vec{\alpha} \cdot \hat{p})^2 = \hat{p}^2$ gesichert?

Antwort 10.3 Ja, weil es sich um einfach zusammengesetzte Stufenmatrizen handelt:

$$(\vec{\alpha} \cdot \hat{p})^2 = \begin{pmatrix} 0 & \hat{\sigma} \cdot \hat{p} \\ \hat{\sigma} \cdot \hat{p} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \hat{\sigma} \cdot \hat{p} \\ \hat{\sigma} \cdot \hat{p} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\hat{\sigma} \cdot \hat{p})^2 & 0 \\ 0 & (\hat{\sigma} \cdot \hat{p})^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\hat{p} \cdot \hat{p}) & 0 \\ 0 & (\hat{p} \cdot \hat{p}) \end{pmatrix} = (\hat{p} \cdot \hat{p})$$

Fazit: Der Hamilton-Operator \hat{H}_D sichert Teilchen in Impulseigenzuständen jetzt die relativistisch richtige Beziehung von Energie und Impuls.¹⁰

⁷Sie kann z.B. für Pionen π^\pm benutzt werden, Teilchen ohne Spin und in zwei Ladungszuständen.

⁸wie schon in Kap. 7.1.3 erwähnt

⁹Es gibt tatsächlich keine andere Form, die sich wesentlich hiervon unterscheidet

¹⁰Das allein garantiert genau genommen noch nicht, dass die Dirac-Gleichung relativistisch korrekt wird, sondern ist nur eine *notwendige* Bedingung. Sie reicht aber aus, die Notwendigkeit dieses neuen Formalismus deutlich zu machen. Für den vollen Beweis der Lorentz-Invarianz siehe unten Kap. 10.2.5.

Dirac-Gleichung. Mit einer Wellenfunktion Ψ (deren genauere Form gleich noch zu diskutieren ist) haben wir dann die berühmte Dirac-Gleichung

$$\text{zeitabhängig : } \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial t} \Psi(t, \vec{r}) = \hat{H}_D \Psi(t, \vec{r}) , \quad (10.6)$$

$$\text{als Eigenwertgleichung : } \hat{H}_D \Psi(t, \vec{r}) = E \Psi(t, \vec{r}) .$$

Standard-Darstellung der Dirac-Matrizen. Es ist üblich, die drei Komponenten von $\hat{\vec{\sigma}}$ in Form der *Paulischen Spinmatrizen*¹¹ auf Zahlen zurückzuführen (womit die fett gedruckte $\mathbf{1}$ in β auch zu einer Matrix werden muss):

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} , \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} , \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} , \quad \mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (10.10)$$

Beim Einsetzen in Gl. (10.5) werden aus $\vec{\alpha}$ und β dann 4×4 -Matrizen, genannt die *vier Dirac-Matrizen in ihrer Standardform*. Für die folgende Diskussion brauchen wir diese Matrizen aber nicht voll auszuschreiben.

Die Pauli-Matrizen wurden hier übrigens nur ihrer mathematischen Eigenschaften wegen gebraucht, vom Spin war gar nicht die Rede. Es wird sich aber gleich herausstellen, wie ihr Auftritt in der Dirac-Gleichung dazu führt, dass man den zugehörigen Teilchen einen Spin $s = 1/2$ zuschreiben muss. Der Spin gewinnt damit in der relativistischen Quantenmechanik eine ebenso unerwartete wie unanschauliche, sehr mathematische Begründung.

10.2.2 Spin

Der Spin wird erschaffen. Die von \hat{H}_D beschriebenen Prozesse würden die Drehimpulserhaltung in gewohnter Form verletzen, denn dieser Operator ist – das kann nicht überraschen – nicht invariant gegen Rotation. Wirklich gedreht wird dabei nämlich nur der Vektor \vec{p} (man denke z. B. an einen Impulseigenzustand, dessen Impuls von der x - in die y -Richtung geschwenkt wird), während der andere Faktor in dem leichthin “Skalarprodukt” genannten Ausdruck $(\vec{\alpha} \cdot \vec{p})$ nach wie vor aus denselben drei Matrizen $\vec{\alpha}$ mit denselben Zahlen gebildet werden soll.¹² Zur Wiederherstellung des ursprünglichen Werts dieses eigenartigen Skalarprodukts ist eine weitere Transformation nötig.

Man erinnere sich (Kap. 7.1.1): Nur ein Hamilton-Operator, der rotationsinvariant ist, sichert die Erhaltung des Drehimpulses. Beides drückt sich durch die Vertauschbarkeit mit dem Drehimpuls-Operator aus.

Direktes Ausrechnen mit dem Bahndrehimpulsoperator $\hbar \hat{\vec{\ell}} = \hat{\vec{r}} \times \hat{\vec{p}}$ ergibt $[\hat{\vec{\ell}}, \hat{H}_D] = i \vec{\alpha} \times \hat{\vec{p}}$ für den Kommutator, der verschwinden soll. Was tun? Radikale Lösung: Dirac *definiert* einen neuen Drehimpulsoperator $\hat{\vec{j}} = \hat{\vec{\ell}} + \text{“Ergänzung } \hat{\vec{s}} \text{”}$ dadurch, dass er dann mit \hat{H}_D vertauschbar sein soll: $[\hat{\vec{j}}, \hat{H}_D] \stackrel{!}{=} 0$. Die geeignete Ergänzung ist ein *konstantes* Zusatzglied

$$\hat{\vec{s}} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix} . \quad (10.11)$$

Physikalische Ausdeutung¹³: Ein Teilchen im Zustand eines Dirac-Spinors hat zusätzlich zu seinem *Bahn*-Drehimpuls $\hat{\vec{\ell}}$ immer (auch wenn es ruht!) einen *Spin*-Drehimpuls $\hat{\vec{s}}$ vom Betrag $\sqrt{s(s+1)}$ mit der Quantenzahl $s = 1/2$.

¹¹Ausführlich dargestellt in Kap. 7.1.2. Kurze Erinnerung: Der Operator $\hat{\vec{s}} = 1/2 \hat{\vec{\sigma}}$ gibt in der (früher phänomenologisch eingeführten) zweikomponentigen Wellenfunktion des Elektrons den Spin $s = 1/2$ wieder. Z.B. ist $1/2 \sigma_z$ eine Diagonal-Matrix mit den Eigenwerten $m_s = \pm 1/2$. Die Vertauschungsrelationen der Pauli-Matrizen entsprechen genau den algebraischen Regeln, die $\hat{\vec{s}}$ zu erfüllen hat, um (wie alle Drehimpuls-Operatoren) als Erzeuger von Drehungen im 3-dimensionalen Raum zu funktionieren (vgl. Kasten 7.1). Wegen des Spezialfalls $s = 1/2$ gilt hier zusätzlich: Produkte verschiedener Komponenten sind antikommutativ: $\sigma_x \sigma_y = -\sigma_y \sigma_x$ etc.; die Quadrate sind die 2×2 -Einheitsmatrix, $\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = \sigma_z^2 = \mathbf{1}$ etc. Genau dadurch kommt die einzigartige Eigenschaft $(\hat{\vec{\sigma}} \cdot \vec{p})^2 \equiv \vec{p} \cdot \vec{p}$ zustande.

¹²Das ist auch der Grund, weshalb die Lorentz-Invarianz extra zu beweisen ist, wie in Fußnote 10 angemerkt.

¹³Auch nach der Erweiterung auf 4 Dimensionen erfüllen die Matrizen s_x, s_y, s_z dieselben Vertauschungsregeln und haben die selben Eigenwerte wie ihre Gegenstücke $1/2 \vec{\sigma}$ in 2 Dimensionen. Die ganze Rechnung steht z.B. bei [36] S. 124.

Kasten 10.1: Diracsche Theorie der Fermionen (erste Schritte)

Ansatz: Lorentz-invarianter Hamiltonoperator (freies Teilchen): $\hat{H}_D = (\vec{\alpha} \cdot \hat{\vec{p}}) c + \beta mc^2$
 ($\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z, \beta$ so festlegen, dass $\hat{H}_D^2 = \hat{\vec{p}}^2 c^2 + m^2 c^4$ und damit $E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4$ wird).

Lösung: 4×4-Matrizen (in Stufenform) $\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & \hat{\vec{\sigma}} \\ \hat{\vec{\sigma}} & 0 \end{pmatrix}$, $\beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

mit der 2×2-Einheitsmatrix und den Paulischen Spin-Matrizen

$$\mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} , \quad \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} , \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} , \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Spin: Damit \hat{H}_D bei räumlichen Drehungen invariant bleibt (\Leftrightarrow Drehimpulserhaltung), muss der erzeugende Operator für Drehungen von $\hat{\vec{\ell}} = \hat{\vec{r}} \times \hat{\vec{p}}$ zu $\hat{\vec{j}} = \hat{\vec{\ell}} + \hat{\vec{s}}$ ergänzt werden, wobei:

$$\hat{\vec{s}} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \hat{\vec{\sigma}} & 0 \\ 0 & \hat{\vec{\sigma}} \end{pmatrix}$$

\vec{s} gehört mit in die Drehimpuls-Bilanz, ist ein stets vorhandener Drehimpuls mit $s = 1/2$, $m = \pm 1/2$, auch wenn Impuls $p = 0$ oder **Bahndrehimpuls** $\ell = 0$.

Dirac-Spinor: In Gleichungen wie $\hat{H}_D \Psi = E \Psi$ müssen die 4×4-Matrizen auf eine Wellenfunktion

mit 4 Komponenten treffen: $\Psi(t, r) = \begin{pmatrix} \psi_1(t, \vec{r}) \\ \psi_2(t, \vec{r}) \\ \psi_3(t, \vec{r}) \\ \psi_4(t, \vec{r}) \end{pmatrix}$ (Dirac-Spinor) .

Deutung: Im Zustand mit $\vec{p} = 0$ ist $\hat{H}_D = \hat{\beta} mc^2$ und hat die Eigenwerte

- $E = +mc^2$ (nur die 2 oberen Komponenten $\neq 0$)
- $E = -mc^2$ (nur die 2 unteren Komponenten $\neq 0$).

Für $\vec{p} \neq 0$ müssen im Spinor oben *und* unten Werte $\neq 0$ stehen, aber im nicht-relativistischen Gebiet $|\vec{p}| \ll mc$ sind die zum jeweils "falschen Energie-Vorzeichen" gehörenden vernachlässigbar klein; näherungsweise bleibt ein Pauli-Spinor: $\tilde{\Psi}(t, r) = \begin{pmatrix} \psi_1(t, r) \\ \psi_2(t, r) \end{pmatrix}$. Die Wellenfunktionen ψ_1, ψ_2 darin sind genau die für $m_s = \pm 1/2$.

Anomaler g-Faktor $g_{Spin} = 2$: Für magnetische Wechselwirkung ($\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$) ist in \hat{H}_D nur $\hat{\vec{p}}$ durch $(\hat{\vec{p}} - e\vec{A})$ zu ersetzen (Vorbild: *klassische Hamilton-Funktion*). Nicht-relativistische Näherung ausrechnen ergibt die Zusatzenergie $\mu_{Bohr} (\hat{\vec{\sigma}} \cdot \vec{B}) \equiv g_s \mu_{Bohr} (\hat{\vec{s}} \cdot \vec{B})$ mit exakt $g_s = 2$.

Abweichung von $g_s = 2$: Messwert erklärt durch virtuell erzeugte Begleiter des Elektrons bzw. Positrons (Störungstheorie mit Einschluss *sämtlicher* bekannter Teilchen):

$g_{e^\pm} = \pm$	2	nacktes Dirac-Teilchen
	×(1 + 0.001 159 647 794	virtuelle Photonen (el-mag. WW)
	+ 0.000 000 002 721	virtuelle <i>Leptonen</i> (schwache WW) +...
	+ 0.000 000 001 671)	virtuelle <i>Hadronen</i> (el mag.+schwache+starke WW)
	= ± 2(1 + 0.001 159 652 186 (±4))	Quelle : [1]
$g_{exp} = \pm$	2(1 + 0.001 159 652 188 3 (±43))	Quelle : [42]

Man darf spekulieren, ob diese Argumentation jemanden vom Elektronen-Spin überzeugt hätte, wäre er nicht mit genau diesem Wert vorher aus den Experimenten herausgelesen und als großes Rätsel empfunden worden. So aber machte dies Ergebnis Dirac ein weiteres Mal¹⁴ berühmt, nicht zuletzt auch durch die Demonstration, wie richtig Schlüsse sein können, und seien sie in der Alltagswelt noch so schwer nachzuvollziehen, wenn sie in einfachen Symmetrie-Forderungen¹⁵ begründet sind. Denn der neue Drehimpuls hat mit dem, was man sich unter diesem Namen als mechanische Größe vorstellen kann, nichts mehr gemein. Er entsteht aus keiner Bewegung, sondern aus dem Zusammenwirken eines räumlichen Vektors wie \vec{p} mit den Dirac-Matrizen in dem Raum ihrer vier abstrakten Dimensionen.

Dirac-Spinor. Wie sieht der zu dem Formalismus passende Zustand Ψ aus? In Gleichungen wie $\hat{H}_D \Psi = E \Psi$ müssen die 4×4 -Matrizen α_x, \dots, β auf eine Wellenfunktion wirken, die sinnvollerweise auch 4 Komponenten haben muss, den *Dirac-Spinor*:

$$\Psi(t, r) = \begin{pmatrix} \psi_1(t, \vec{r}) \\ \psi_2(t, \vec{r}) \\ \psi_3(t, \vec{r}) \\ \psi_4(t, \vec{r}) \end{pmatrix} \quad (10.12)$$

Diese vier Komponenten haben aber nichts mit den 4-dimensionalen Raum-Zeit-Koordinaten (t, r) der Relativitätstheorie zu tun sondern müssen davon getrennt betrachtet werden. Sie bereichern den Zustandsraum des Teilchens um den 4-dimensionalen *Dirac-Raum*, ähnlich wie mit zwei Dimensionen die kurz vorher von Pauli für den Spin-Freiheitsgrad eingeführte Darstellung einer 2-komponentigen Wellenfunktion (Pauli-Spinor, s. Kap. 7.1.2). Alle vier Funktionen tragen zur Aufenthaltswahrscheinlichkeitsdichte des Teilchens bei:

$$|\Psi(t, \vec{r})|^2 = \Psi(t, \vec{r})^\dagger \Psi(t, \vec{r}) = |\psi_1(t, \vec{r})|^2 + |\psi_2(t, \vec{r})|^2 + |\psi_3(t, \vec{r})|^2 + |\psi_4(t, \vec{r})|^2.$$

Eine charakteristische Eigenschaft der vier Komponenten kann man schon aus dem eben gefundenen Spin-Operator von Gl. (10.11) ablesen: Die Matrix \hat{s}_z multipliziert die Komponenten Nr. 1 und 3 des Spinors mit $+1/2$, die anderen beiden mit $-1/2$. Jeweils zu zweien gehören die Komponenten also zu den beiden möglichen Eigenwerten m_s .

10.2.3 Negative Energie?

Verirrt in 4 Dimensionen? Für spinlose Teilchen genügt *eine* Orts-Wellenfunktion, bei Spin $s = 1/2$ brauchte man bislang *zwei* (den Pauli-Spinor) – wozu hat der Dirac-Spinor vier? Sehen wir uns den Spinor in einem Bezugssystem an, in dem das Elektron einen besonders einfachen Energie-Eigenzustand einnimmt: in seinem eigenen Schwerpunktsystem. Dort hat der Impulsoperator den Eigenwert $\vec{p} = 0$ und Diracs Hamilton-Operator (10.4) reduziert sich auf $\hat{H}_D = \beta mc^2$. Wenn dies auf den Spinor angewandt wird ($\hat{H}_D \Psi = mc^2 \beta \Psi$), werden dessen zwei obere Komponenten mit $+mc^2$ multipliziert, die beiden unteren mit $-mc^2$ (siehe die Standardform der Matrix β in Gl. 10.5). Um die Eigenwertgleichung $\hat{H}_D \Psi = E \Psi$ mit einem einzigen Faktor E zu erfüllen, müssen entweder die beiden unteren oder die beiden oberen Null sein, und der gemeinsame Faktor ist entsprechend im einen Fall $E = +mc^2$, im anderen $E = -mc^2$. Beides muss hier als möglicher Energie-Eigenwert eines ruhenden Elektrons gelten. Es gibt demnach – ohne jedes äußere Feld! – zwei verschiedene Energien, und als weitere Unmöglichkeit¹⁶: eine davon ist negativ. Das war die schwer verdauliche Beigabe zum relativistischen Elektron in der Quantenmechanik.

Große und kleine Komponenten. Kann man diese Zustände und Spinor-Komponenten zu negativen Energien nicht einfach ignorieren, wie in der klassischen relativistischen Mechanik früher schon immer die negative Wurzel aus Gl. (10.2)? Nein – denn bei einem Spinor für ein bewegtes Elektron ($\vec{p} \neq 0$) kommen nun auch die α_x, \dots -Matrizen zum Tragen, mit ihren Elementen (ungleich Null) in den Nebendiagonalen. Daher mischt Diracs Hamilton-Operator die oberen beiden mit den unteren beiden Komponenten des Spinors. Dabei wirkt er auf die beiden oberen Amplituden so, dass sie mit $+mc^2$ multipliziert oben bleiben,

¹⁴Nach seiner Abhandlung über die Berechnung von spontanen und induzierten Quantensprüngen im elektromagnetischen Feld, Kap. 9.4.3.

¹⁵Lorentz-Invarianz, Rotations-Invarianz

¹⁶Der Energie-Nullpunkt ohne Potential ist in der Relativitätstheorie ja absolut festgelegt.

und mit Faktoren wie $\pm p_x c$ oder $\pm i p_x c$ multipliziert zu den unteren Komponenten addiert werden (für x, y analog). Ausgehend von einem Elektron in Ruhe und mit $E = +mc^2$, bekommt dies bei Bewegung zwangsläufig untere Komponenten ungleich Null, und zwar im Größenverhältnis $|\vec{p}|c/mc^2 = p/mc$ zu den oberen. Bevor wir das gleich genauer betrachten, kann man hier sehen, dass die beiden unteren Komponenten im nicht-relativistischen Fall $|\vec{p}| \ll mc$ wenigstens sehr klein sein werden. Wenn man sie näherungsweise ganz weglässt, gewinnt man einen Pauli-Spinor zurück:

$$\Psi_{Pauli}(t, r) = \begin{pmatrix} \psi_1(t, r) \\ \psi_2(t, r) \end{pmatrix}$$

Die Wellenfunktionen ψ_1, ψ_2 darin sind – wie oben gezeigt – tatsächlich genau die für die beiden Spin-Orientierungen $m_s = \pm 1/2$. Das mag beruhigen, es wird aber gleich ein Beispiel gezeigt, in dem wir uns selbst im nicht-relativistischen Grenzfall mit dieser Vereinfachung ein ganz wesentliches Ergebnis entgehen lassen.

10.2.4 Anomales magnetisches Moment

Doppelte magnetische Wechselwirkung. Rechnet man für solche nicht-relativistischen Zustände die Wechselwirkung der Teilchen mit einem Magnetfeld aus, bringen die beiden großen oberen Komponenten des Spinors allein gerade soviel wie für einen klassischen Kreisstrom zum selben Drehimpuls $1/2\hbar$ erwartet wird, also einen g -Faktor $g=1$. Das ist für sich allein schon sensationell: Hier tritt eine ruhende elektrische Punktladung, der aus eher formalen Gründen ein Eigen-Drehimpuls zugeschrieben wurde, wie ein echter Kreisstrom in Erscheinung. Es geht aber noch weiter: Der Hamilton-Operator (mit Magnetfeld) multipliziert die unteren Komponenten – ganz gleich wie klein sie sind – jetzt mit Faktoren, die den Größenunterschied zu den oberen exakt ausgleichen. So tragen sie zur Energie noch einmal genau soviel bei wie die großen Komponenten, es ergibt sich $g_s = 2$. Ohne jede weitere Annahme kommt (als nicht-relativistische Näherung) aus der Dirac-Gleichung die anomale magnetische Wechselwirkung des Spins richtig heraus.

Demnach ist der 4-dimensionale Raum der Dirac-Spinoren die Quelle nicht nur für eine neue Art von Drehimpuls, der nichts mehr mit einer sich drehenden Massenverteilung zu tun hat, sondern auch für eine magnetische Wechselwirkung, ohne dass es einen Strom gibt, und die (im Verhältnis zu diesem neuartigen Drehimpuls) richtig die nur hier beobachtete anomal verdoppelte Größe hat. Nach dieser sensationellen theoretischen Deutung wurden auch endlich die ohnehin erfolglosen Versuche aufgegeben, mit exotischen Zusatzannahmen Spin und anomales magnetisches Moment des Elektrons doch durch die rasche Drehung einer kleinen (geladenen) Kugel zu erklären.

Für die eigentliche Berechnung geht Dirac genau nach dem Vorbild der *klassischen Hamilton-Funktion* für einen geladenen Massenpunkt (ohne Drehimpuls und Dipolmoment) in einem Magnetfeld $\vec{B} = \text{rot}\vec{A}$ vor: In \hat{H}_D ist nur $\hat{\vec{p}}$ durch $(\hat{\vec{p}} - e\vec{A})$ zu ersetzen¹⁷ (“Dirac-Kopplung”). Dabei wird \vec{A} noch nicht (wie in Kap. 9.4.3 beschrieben) als Operator sondern einfach wie ein klassisches äußeres Feld behandelt. Nach Ausmultiplizieren (und Anwenden der nicht-relativistischen Näherung $E + mc^2 \approx 2mc^2$) entsteht für die beiden oberen Komponenten der von früher bekannte Hamilton-Operator für den Pauli-Spinor, und zeigt eine Zusatzenergie $(\mu_B \vec{\sigma}) \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A})$, also genau wie für einen magnetischen Dipol $(\mu_B \vec{\sigma} \cdot \vec{B})$, denn $\vec{\nabla} \times \vec{A}$ ist ja das Magnetfeld \vec{B} . Im Unterschied zur älteren Schrödingergleichung wird hier aber das Skalarprodukt nicht mit dem Spin \vec{s} gebildet, sondern mit $\vec{\sigma} = 2\vec{s}$. Der Vorfaktor ergibt den gesuchten anomalen Spin- g -Faktor $g_s = 2$. Das wurde und wird als ein Triumph der Vereinigung von Quantentheorie und Relativitätstheorie angesehen, doch hierzu drei Bemerkungen:

- In der Begeisterung wurde vermutlich übersehen, dass die verdoppelte magnetische Wechselwirkung auch schon richtig herausgekommen wäre, wenn man den “Zauberschlüssel” $(\vec{\sigma} \cdot \vec{p})^2 \equiv \vec{p} \cdot \vec{p}$ einfach in den nicht-relativistischen Hamilton-Operator eingeführt hätte, also mit $\hat{H}_{n.r.} = (\vec{\sigma} \cdot \hat{\vec{p}})^2/2m$ gerechnet und dort $\hat{\vec{p}} \rightarrow (\hat{\vec{p}} - e\vec{A})$ eingesetzt. Im Unterschied zum Spin als solchem ist sein doppelter g -Faktor

¹⁷So einfach sieht die Formel nur in dem in der Atom- und Elementarteilchen-Physik üblichen Maßsystem aus, in dem das Coulomb-Potential e^2/r heißt.

also nichts, das ohne die Relativitätstheorie nicht zu erklären ist.¹⁸ Diese Bemerkung soll keine Zweifel an der Richtigkeit der relativistischen Erklärung wecken, sondern nur an die allgemeine Tatsache erinnern, dass – bildlich – einzelne Streben, die im theoretischen Gerüst der Physik wichtige Aussagen miteinander verbinden, nicht so belastbar sind wie das Ganze, weshalb sie unter Umständen auch revidiert werden könnten. Z.B. im Zusammenhang mit der Schwachen Wechselwirkung ist das mehrmals mit vermeintlich gut abgesicherten Zusammenhängen vorgekommen (s. Kap. 12.2ff.).

- Mit der hier gefundenen Erklärung einer magnetischen Wechselwirkung ohne elektrischen Strom löste sich eins der alten Probleme in den Fundamenten der klassischen Physik auf. Ihr zufolge dürfte es nämlich in einer Welt aus Massenpunkten überhaupt keinen makroskopischen Magnetismus geben. Grund: Da das Magnetfeld nur den Impuls, aber nicht die Energie von (elektrisch geladenen) Massenpunkten beeinflusst, kommt es in der (klassischen) Hamilton-Funktion gar nicht vor und kann dann auch keine Auswirkungen auf den wahrscheinlichsten Zustand, das thermodynamische Gleichgewicht haben.¹⁹
- In Kap. 9.7.7 ist schon besprochen worden, dass der g -Faktor knapp 20 Jahre später doch um 1.1% größer gemessen wurde, und dass die theoretische Erklärung – die bald danach durch eine verbesserte Behandlung des statischen Magnetfelds im Rahmen der entstehenden Quantenfeldtheorie gelang – wiederum den Ruhm der *Quantenelektrodynamik* begründete. Der g -Faktor ist also doch keine kleine natürliche Zahl und schon von daher “gequantelt”, sondern eine auf weitere Effekte reagierende Messgröße. Das macht ihn auch auf einem ganz anderen Gebiet für einen empfindlichen Test interessant: für den Vergleich Teilchen/Antiteilchen (s.u. Kap. 10.2.6).

10.2.5 Wie die Dirac-Gleichung Lorentz-invariant wird

Etwa nicht einmal spiegelinvariant? Beim ersten Hinsehen scheint die Dirac-Gleichung (10.4) skalare Größen miteinander zu verbinden, wie man es von einer gegen Koordinaten-Transformationen invarianten Gleichung auch erwartet. Doch der Schein trügt, wie oben schon angemerkt.

Wie das zu beheben ist, kann man am einfachsten bei der Raumspiegelung ($\vec{r} \rightarrow -\vec{r}$) sehen, gegen die die Dirac-Gleichung natürlich auch invariant sein soll. Im Dirac-Operator \hat{H}_D dreht sich bei der Spiegelung nur das Vorzeichen von \hat{p} um, während die $\vec{\alpha}$ -Matrizen gleich bleiben: Dieser Operator \hat{H}_D ist *nicht* invariant.

Abhilfe: im Dirac-Raum mitspiegeln. Um das Vorzeichen wieder zurückzudrehen und alles wieder so aussehen zu lassen wie vorher, multipliziert man den Spinor gleichzeitig mit der Dirac-Matrix β , die mit den $\vec{\alpha}$ -Matrizen antikommutiert. Für den so transformierten Spinor $\bar{\Psi}(t, \vec{r}) = \beta\Psi(t, -\vec{r})$ ergibt sich mit dem gespiegelten Dirac-Operator die alte Dirac-Gleichung, also die gewünschte Invarianz.

Diese Transformation des Spinors führt zu einer weiteren unanschaulichen Konsequenz, denn die Matrix β behandelt nun obere und untere Komponenten mit verschiedenen Vorzeichen, gibt also dem Antiteilchen immer die entgegengesetzte Parität wie einem normalen Teilchen mit derselben Ortswellenfunktion. Das stimmt aber tatsächlich mit den Beobachtungen überein. Am Positronium – dem “Atom” aus Elektron und Positron, in seinem 1s-Grundzustand mit Parität +1 in der räumlichen Wellenfunktion – konnte man nachweisen, dass die gesamte Parität doch -1 ist. Die beiden γ -Quanten der Vernichtungsstrahlung bilden nämlich zusammen ein elektromagnetisches Strahlungsfeld mit negativer Parität (d.h. \vec{E} wechselt bei Spiegelung das Vorzeichen), erkennbar am Verhältnis ihrer beiden Polarisierungen, die durch Compton-Streuung auseinander gehalten werden können. Die beiden Quanten sind nicht nur durch ihre (immer genau entgegen gesetzten) Flugrichtungen miteinander verschränkt, sondern auch hinsichtlich ihrer (immer orthogonalen) Polarisierungen. – Die gleiche Umkehrung der Parität gemäß der Dirac-Theorie wird auch bei den *pseudoskalaren Mesonen* in Kap. 11.1.5 gebraucht.

¹⁸Als Anregung: Achten Sie einmal darauf, wie oft in Lehrbüchern die erfolgreiche Erklärung von $g = 2$ allein der relativistischen Quantenmechanik zugeschrieben und als eine Art Beleg für ihre Richtigkeit dargestellt wird, zweifellos mit der Folge, dass diese etwas geschönte Aussage auch im physikalischen Grundwissen angesiedelt ist. Auch der Schreiber dieser Zeilen gesteht ein, erst bei den Recherchen für das vorliegende Buch über das Gegenbeispiel gestolpert zu sein (in [38]).

¹⁹Ausführlich dargestellt z.B. in den *Feynman Lectures on Physics*[19, BD. II].

Bewegung. Genauso wie bei der Spiegelung geht man auch beim Übergang in ein bewegtes Bezugssystem vor, bei dem die Komponenten jedes 4-Vektors (t, \vec{r}) sich nach der Lorentz-Transformation miteinander mischen müssen, und die entsprechenden Ableitungsoperatoren $\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial t} = \hat{E}$, $\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x} = \hat{p}_x \dots$ auch. Da der Dirac-Operator \hat{H}_D dagegen nicht invariant ist, wird die Aufgabe, die ganze Gleichung aus Operator und Spinor invariant zu machen, auf den Spinor abgewälzt.

Dafür lohnt es sich, zunächst den Dirac-Operator \hat{H}_D selbst in eine Lorentz-konforme Gestalt umzuschreiben, also durch Invarianten auszudrücken. Eine davon muss dann die Masse sein. Aus Gl. (10.4) wird (wegen $\beta^2 = \mathbf{1}$, und dividiert durch c):

$$mc = \beta \hat{H}_D / c - (\beta \vec{\alpha} \cdot \hat{\vec{p}}).$$

Auf der rechten Seite erkennt man die Operatoren $(\hat{H}_D/c, \hat{\vec{p}})$ in derselben Form zusammengefasst wie in der Relativitätstheorie der Energie-Impulsvektor $p^\mu = (E/c, \vec{p})$, ($\mu = 0, 1, 2, 3$)²⁰. Da links eine Lorentz-Invariante steht, muss es sich insgesamt um ein Skalarprodukt mit einem anderen 4-Vektor handeln. Der besteht offenbar aus den vier Matrizen $(\gamma^0, \gamma^1, \gamma^2, \gamma^3) = (\beta, \beta\alpha_x, \beta\alpha_y, \beta\alpha_z)$, die zusammenfassend als die vier γ^μ -Matrizen der Dirac-Theorie bezeichnet werden. Nur, dieser Vektor ist sicher kein 4-Vektor im Sinne der Lorentz-Transformation, denn er bleibt ja immer gleich. Der Ausweg besteht darin, sich darauf zu besinnen, dass eine Theorie nur die *messbaren* Größen richtig wiedergeben muss, und die sind in der Quantenmechanik immer durch das Skalarprodukt zweier Zustandsvektoren mit einem Operator dazwischen gegeben. Man muss also verlangen, dass die vier Größen

$$j_{BA}^\mu = (\Psi_B^\dagger \gamma^\mu \Psi_A), \quad (10.13)$$

wenn Ψ_A, Ψ_B zwei Dirac-Spinoren sind, sich wie ein Lorentz-Vektor verhalten. Dazu muss sich jeder Spinor in einer wohlbestimmten Weise mit transformieren, wenn der denselben Zustand von einem bewegten Bezugssystem aus bezeichnen soll (oder, logisch dasselbe, wenn er statt eines ruhenden ein bewegtes Teilchen beschreiben soll).²¹

Das Teilchen ruht. Ausgehend von einem ruhenden Teilchen ($p = 0$) soll das Ergebnis dieser Prozedur erläutert werden (ohne die Rechnung im einzelnen vorzuführen). Bei positiver Energie $E = +mc^2$ und $m_s = +1/2$ ist der Spinor einfach:

$$\Psi_{p=0}(t, \vec{r}) = e^{-\frac{i}{\hbar} Et} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (10.14)$$

Für das ruhende Teilchen darf die 1 auch an jeder der drei anderen Stellen im Spinor stehen, wobei sich von oben abwechselnd $m_s = \pm 1/2$ ergibt und ab der 3. Komponente negative Energie $E = -mc^2$. Wie sich jetzt aber zeigen wird, sind dies schon die einzigen vier Eigenzustände der Dirac-Gleichung, in denen jeder der Komponenten eine einfache und messbare Bedeutung zukommt, nämlich je eine der vier Kombinationen aus $m_s = \pm 1/2$ und $E = \pm mc^2$.

Lorentzboost. In allen bewegten Zuständen ist eine so anschauliche Beschreibung der einzelnen Komponenten bestenfalls eine Näherung, was einen intuitiven Zugang zu diesem Formalismus durchaus schwer machen kann. Den Spinor für ein bewegtes Teilchen gewinnt man durch einen "Lorentzboost" (" \Rightarrow " in Gl. 10.15), d.h. man setzt sich in ein mit der entsprechenden Geschwindigkeit²² entgegengesetzt bewegtes Koordinatensystem und berechnet mit der für die Lorentz-Invarianz erforderlichen Transformation des Spinors,

²⁰Der Index μ bezeichnet immer die vier Dimensionen (t, \vec{r}) des Raums, auch wenn der Hinweis " $(\mu = 0, 1, 2, 3)$ " fehlt.

²¹Diese Herleitung wird vielerorts logisch andersherum dargestellt: Erst Eigenspinoren der Dirac-Gleichung (10.4) mit $p \neq 0$ suchen und mit ihnen dann beweisen, dass sich – sozusagen "glücklicherweise" – insgesamt die Lorentz-Invarianz ergibt. Die oben beschriebene Richtung bringt den Zusammenhang m.E. klarer zum Ausdruck. Die Rechnung dazu, hier überschlagen, findet man im Detail durchgeführt z.B. in dem seit Jahrzehnten unübertroffenen Standardlehrbuch von A. Messiah [29, Kap. XX §11].

²² $v/c = pc/E$ ist die Geschwindigkeit des mit Impuls p fliegenden Teilchens, das dann die Energie $E = \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4}$ hat. Dies folgt aus der populären Formel für die "relativistische Massenzunahme" $E = mc^2 / \sqrt{1 - (v/c)^2}$ leicht, indem man sie quadriert.

wie er nun von dort gesehen aussieht. Der Spinor ist natürlich wieder ein Eigenzustand zum Hamilton-Operator \hat{H}_D (der schließlich für eine Lorentz-invariante Theorie konstruiert worden ist). Er bekommt nun nicht nur eine Ortsabhängigkeit nach Art einer ebenen Welle, sondern auch neue Komponenten (wir überschlagen die Rechnung²³ und lassen Normierungsfaktoren fort):

$$\Psi_{p=0}(t, \vec{r}) = e^{-\frac{i}{\hbar} Et} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \Psi_p(t, \vec{r}) = e^{-\frac{i}{\hbar} (Et - \vec{p} \cdot \vec{r})} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{cp_z}{E+mc^2} \\ \frac{cp_x + icp_y}{E+mc^2} \end{pmatrix} \quad (10.15)$$

$$\left[\begin{array}{l} \bullet \text{ Teilchen ruht} \\ \bullet E = +mc^2 \\ \bullet m_s = +1/2 \end{array} \right] \quad \Rightarrow \quad (Lorentzboost) \quad \left[\begin{array}{l} \bullet \text{ Teilchen hat Impuls } \vec{p} \\ \bullet E = +\sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4} \\ \bullet m_s = +1/2 \text{ (wenn } \vec{p} \parallel z) \end{array} \right]$$

Zu einem normalen bewegten *Teilchen* mit ganz normaler Energie $E = +\sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4}$ gehört demnach ein Spinor, der unweigerlich auch Komponenten hat, die bei einem ruhenden Teilchen zur negativen Energie gehören würden.

Mehr zur Verquickung von Impuls und Spin. Dies ist nicht die einzige nicht recht intuitive Verbindung zwischen den Dimensionen des Dirac-Raums und des Ortsraums. Wie an Gl. (10.15) zu sehen ist, kann der Spinor des bewegten Teilchens im allgemeinen kein Eigen-Spinor zu $m_s = +1/2$ mehr sein, es sei denn, die z -Achse liegt zufällig in Richtung des Impulses (oder entgegengesetzt dazu). Nur dann fällt der Beitrag zum “falschen” m_s (die 4. Spinor-Komponente) weg. Folge: Nur in Bezug auf die Flugrichtung des Teilchens kann man dem Spin einen seiner beiden Eigenzustände parallel/antiparallel zuweisen. Statt wie früher üblich “Spin auf” und “ab” sagt man für diese Basiszustände daher besser “Spin vorwärts” (rechtsdrehend) oder “rückwärts” (linksdrehend)²⁴ oder *Helizität* $h = +1$ bzw. $h = -1$. Dies sind die Eigenwerte zu dem (mit dem Hamilton-Operator vertauschbaren!) Helizitäts-Operator $\hat{h} = (\hat{\vec{\sigma}} \cdot \hat{\vec{p}})/p$. Natürlich darf man aus den beiden Eigenzuständen beliebige Linearkombinationen bilden, es kommt dabei aber eben nie ein Energieeigenzustand mit dem Spin in einer bestimmten Richtung schräg zur Flugbahn heraus.

Wie kann eine solche Einschränkung der Spin-Orientierung bei der Wahl des Energie-Eigenzustands möglich sein, ohne dass es hier eine spinabhängige Kraft gibt? Das ist zunächst rein formal einfach zu sagen: Die Operatoren \hat{H}_D und \hat{s}_z sind nicht vertauschbar²⁵. Dann können sie keine vollständige Basis aus Eigenzuständen gemeinsam besitzen. Aber auch “physikalisch” gibt es ein gutes Argument, denn es wirft ein Licht darauf, wie sich Phänomene aus der klassischen Relativitätstheorie in dieser neuen Welt auswirken. Zunächst wird hier einerseits wieder ein Gegensatz zur klassischen Mechanik deutlich: Klassisch *kann* ein Drehimpuls $\vec{\ell} = \vec{r} \times \vec{p}$ nie parallel oder antiparallel zum Impuls \vec{p} stehen²⁶. Doch kommt er mit steigender Geschwindigkeit diesem Zustand immer näher, denn die Bewegung auf der Kreisbahn, die man sich zu einem Bahndrehimpuls ja immer vorstellen kann, hat bei schräg liegender Achse auch Komponenten parallel zu \vec{p} , und nur diese werden durch die Lorentz-Kontraktion reduziert. Damit neigt sich die Drehachse immer stärker zur Flugrichtung hin und ist im hochrelativistischen Fall parallel (oder antiparallel) zu ihr.

Immerhin sieht man in Gl. (10.15) noch einmal, dass beide unteren Komponenten für nicht-relativistische Teilchen klein sind und sich auch bei höchsten Energien ($E \gg mc^2$, d.h. $E \approx pc$) den oberen Komponenten nur annähern, sie aber nicht übersteigen können. Mit diesem Verhalten schlagen sie sich in vielen Berechnungen nieder und bringen sie dadurch erst mit den beobachteten Effekten in Übereinstimmung (wie z.B. zu der Klein-Nishina-Formel für den Compton-Effekt in Kap. 6.4.3 und 9.6 schon angemerkt wurde).

²³ nachzulesen z.B. in [8, S. 175], [21, S. 243]

²⁴ wobei die Verwendung des Wortes “drehend” eine ziemlich fragwürdige Anleihe bei der Anschaulichkeit zu machen versucht, denn beim Spin dreht sich ja nichts.

²⁵ Das gilt auch für \hat{s}_x, \hat{s}_y . Schließlich sollte $[\hat{H}, \vec{s}] = -[\hat{H}, \vec{\ell}] \neq 0$ sein, damit \hat{H}_D mit $(\hat{\vec{\ell}} + \hat{\vec{s}})$ vertauschbar wird.

²⁶ sondern nur senkrecht zu ihm. Auch das signalisiert einen grundsätzlichen Unterschied zum Spin.

Wechselwirkung relativistisch invariant einbauen. Auch nach Einfügen von Wechselwirkungen \hat{H}_{WW} muss der Hamilton-Operator die Bewegungsgleichung noch Lorentz-invariant sein. Die erfolgreiche Ankopplung an das magnetische Vektorpotential nach dem klassischen Vorbild $\vec{p} \rightarrow (\vec{p} - e\vec{A})$ (s.o.) ist ein Glücksfall, der so nicht auf Prozesse wie den β -Zerfall übertragbar ist. Damit der Operator \hat{H}_{WW} relativistisch richtig wird, muss er sich auch ganz durch Lorentz-invariante Größen ausdrücken lassen, z.B. durch das Skalarprodukt von zwei 4-Vektoren. Der 4-Vektor für das elektromagnetische Feld ist schon bekannt (Gl. 10.1), und welchen 4-Vektor man aus dem Zustand Ψ des Elektrons gewinnen kann, ist oben schon klar geworden: Man nennt j_{BA}^μ den *Übergangstrom* vom Zustand A ind B .

Der Name erklärt sich so, dass im Fall $\Psi_A = \Psi_B = \Psi$ gerade die Stromdichte des des Teilchens im Zustand Ψ herauskommt: $j^\mu = (\Psi^\dagger \gamma^\mu \Psi)$. $j^0 = \rho$ ist die räumliche Dichte, $(j^1, j^2, j^3) = \vec{j}$ bildet die räumliche Stromdichte. Zusammen mit der Dirac-Gleichung ist die Kontinuitätsgleichung erfüllt, also die Erhaltung der Norm bzw. Teilchenzahl.

Für beliebige Ψ_A, Ψ_B spielt j_{BA}^μ unter dem Namen *Vektorstrom* eine zentrale Rolle bei der Formulierung von Wechselwirkungen. So ist sein Skalarprodukt mit dem elektromagnetischen 4-Potential A^μ nun wirklich Lorentz-invariant und vermittelt als Störoperator \hat{H}_{WW} den elektromagnetischen Übergang $\Psi_A \rightarrow \Psi_B$. Um einen Übergang zu beschreiben, bei dem ein Teilchen vernichtet und eins erzeugt wird – wie Elektron e^- und Neutrino ν bei der β -Radioaktivität (z.B. $p + e^- \rightarrow n + \nu$) – gibt man dem einen den Zustand Ψ_e und dem anderen Ψ_ν und bezeichnet $j_{e\nu}^\mu$ als Übergangstrom. Da immer auch ein weiterer Vernichtungs-/Erzeugungsprozess ablaufen muss, hat man einen zweiten Übergangstrom (im Beispiel j_{pn}^μ), und für den Gesamtprozess ist es das nächstliegende, den Wechselwirkungsoperator als Skalarprodukt dieser beiden 4-Vektoren anzusetzen. So hat schon Fermi in seiner bahnbrechenden Theorie der β -Strahlen gerechnet. Als allgemeines Konzept wurde es 1958 von Murray Gell-Mann unter dem Namen Strom-Strom-Kopplung eingeführt und hat sich auch für die anderen Wechselwirkungen äußerst erfolgreich bewährt.

Außer dem Skalarprodukt von zwei Vektorströmen bieten die Spinoren formal noch genau vier weitere Möglichkeiten, eine Lorentz-Invariante zu bilden. Nur eine davon kommt nach gegenwärtiger Kenntnis noch als Wechselwirkung vor, der *axiale Vektorstrom*, der im übernächsten Abschnitt 10.2.7 vorgestellt wird.

10.2.6 Anti-Teilchen.

Wie soll man mit einer neuen Theorie umgehen, bei der die überraschendsten Erfolge von absurdesten Voraussagen begleitet sind? Am Anfang versuchte selbst Dirac, die geisterhaften Zustände negativer Energie einfach zu ignorieren. Doch ohne sie kam die neue, bald durch Experimente gut bewährte Formel von Klein und Nishina zum Wirkungsquerschnitt des Compton-Effekts nicht zum richtigen Ergebnis (s. 6.4.3), noch nicht einmal – und das verstörte unter vielen Physikern z.B. auch Heisenberg – im klassischen Grenzfall großer Wellenlänge, für den schon vor Jahrzehnten J. J. Thomson die richtige Formel klassisch hergeleitet hatte (s. Kap. 6.29). Als nächstes versuchte Dirac seine Theorie zu retten, indem er die negativ geladenen Teilchen negativer Energie zu positiv geladenen mit positiver Energie umdeutete und die Protonen damit identifizierte. Doch das ließ sich auch nicht halten, weil dann nicht nur die Massen gleich sein müssten sondern gegenseitige Vernichtung eintreten würde. Oppenheimer errechnete mit der inzwischen entwickelten Theorie der Emission von Photonen (die erst 1926 auch von Dirac begründet worden war, s. Kap. 9.5), dass kein H-Atom dies länger als 10^{-10} s überleben würde. Diracs neuer (waghalsiger) Ausweg: Alle diese Zustände negativer Energie sind schon von Elektronen besetzt, Übergänge in diese Unterwelt also durch das Pauli-Prinzip verboten. Dies sei aber das “Normale” und daher nicht zu bemerken. Brilliant, aber mit einem Pferdefuß. Es müsste sich immerhin um unendlich viele Elektronen mit Energien bis minus unendlich handeln, also auch um eine unendliche Ladungs- und Energie-Dichte und so weiter.²⁷ Der richtige Ausweg aus dem Dilemma wäre die Vorhersage eines neuen Teilchens gewesen, unerhört im damaligen Gedankengebäude der Physik²⁸. Erst drei Jahre nach der Publikation seiner Gleichung schlägt Dirac dies vor, und niemand glaubt ihm, auch nicht Carl Anderson, als er Ende 1931 solche Teilchen in der Höhenstrahlung entdeckt²⁹ und *Positronen* nennt (Nobelpreis 1936). Doch nur kurz darauf galt das

²⁷So weit wurde Diracs Theorie schon in Kap. 6.4.5 umrissen, im Zusammenhang mit einer weiteren experimentellen Beobachtung aus den selben Jahren, der Paar-Erzeugung.

²⁸S. die Anmerkungen zur Vorhersage des Neutrons in Kap. 4.1.5 und des Neutrinos in Kap. 6.5.6.

²⁹und noch ein Jahr später in seiner ersten Veröffentlichung hierzu [2] kein Wort über Diracs Theorie verliert.

Positron schon selbstverständlich als das Diracsche Anti-Elektron, und Dirac bekam den Nobelpreis 1933. Nur ein Jahr später konnte Fermi seine erfolgreiche Theorie des β -Zerfalls vorstellen (s. Kap. 6.5.8), in der er ausgiebig von den Dirac-Spinoren Gebrauch machte und sie auch für das geheimnisvolle Paulische Neutrino ansetzte, nur eben mit der Teilchenmasse Null. Damit erstarb auch das Interesse, weiter nach Alternativen zur Dirac-Theorie zu suchen (vgl. [28]).

In Italien hatte E. Majorana 1932 einen alternativen, relativistisch korrekten Ansatz vorgeschlagen (und 1937 noch einmal voll ausgearbeitet), in dem das Elektron als sein eigenes Antiteilchen erscheint. Im Gegensatz zur Dirac-Theorie würden sich hier auch zwei Elektronen miteinander vernichten, wenn nur der Erhaltungssatz der elektrischen Ladung das nicht verbieten würde. Majoranas Theorie hatte aber den für damaliges Denken entscheidenden Fehler, nicht gegen Raumspiegelungen invariant zu sein. Es würde dann stabile Zustände ohne Paritätsquantenzahl geben. In Kap. 12.2 wird ausführlich behandelt, wie dies Denkverbot in den 1950er Jahren aus dem Weg geräumt wurde. Als dann mit Neutrino und Antineutrino ein ungeladenes Teilchen/Antiteilchen-Paar etabliert worden war und die Frage der Erhaltung der Leptonenzahl auch unabhängig von der Erhaltung der elektrischen Ladung neu gestellt werden konnte, wurde Majoranas Theorie allmählich wieder aufgegriffen. Ob es neben Dirac-Teilchen auch Majorana-Teilchen gibt, ist bis heute die aktuellste offene Frage der Forschung an den Leptonen (s. Kap. 10.4.3).

Doch schon nach der experimentellen Manifestation des Positrons und der Paarerzeugung war überall klar, dass man die beiden unteren Komponenten des Dirac-Spinors, obwohl sie Zustände negativer Energie voraussagten, nicht ignorieren durfte. Das hübsche Bild von der vollbesetzten Unterwelt (mit vereinzelt Löchern namens "Positron") wurde etwa 10 Jahre später durch die *Quantisierung des Dirac-Felds* (also die 2. Quantisierung für die Elektronen wie in Kap. 9.4) abgelöst – allerdings um den Preis, auch das Positron als richtiges Elementarteilchen mit eigenen Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren anzuerkennen. Das wiederum schwächte die vorher selbstverständliche Begründung dafür, dass Teilchen und Antiteilchen bis aufs Vorzeichen der Ladung exakt übereinstimmen sollten. Diese Übereinstimmung ist daher überall dort, wo es möglich war, mit bewundernswürdiger Genauigkeit getestet worden.

Ein Test mit 12stelliger Genauigkeit. Prädestiniert für Präzisionsmessungen sind Resonanzphänomene bei hohen Frequenzen. Ein gutes Beispiel ist die Larmor-Präzession magnetischer Dipole, wie schon bei der magnetischen Kernresonanz in Kap. 7.3.3 besprochen. Damit wurden die g -Faktoren von Positron und Elektron mit einer Genauigkeit von 12 Dezimal-Stellen bestimmt [42]. Hier die Ergebnisse (ausgedrückt in der Form $g_s = 2(1 + a)$, die die Anomalie a deutlich erkennen lässt, und ausnahmsweise mit dem korrekten Vorzeichen versehen):

$$\begin{aligned} g_s(e^-) &= -2 \times (1 + 0.001\,159\,652\,188\,4(\pm 43)) \\ g_s(e^+) &= +2 \times (1 + 0.001\,159\,652\,187\,9(\pm 43)) \end{aligned} \quad (10.16)$$

Also bis auf das erwartete Vorzeichen kein Anzeichen einer Differenz zwischen Teilchen und Antiteilchen.

Etwas Messtechnik. Es lohnt ein Blick darauf, wie diese fantastische Genauigkeit erreicht wurde. Allein drei Dezimalstellen werden dadurch gewonnen, dass man nicht den ganzen g -Faktor misst, sondern gleich die Anomalie $a = 1/2(g - 2)$ selber zur Erzeugung des Messsignals ausnutzt. Das gelingt, wenn man das magnetische Moment $\mu_\ell = \ell\mu_B$ der Bahnbewegung eines kreisenden Elektrons als Bezugspunkt nehmen kann, um nur noch die Abweichung im Verhalten des Elektronenspins zu beobachten. Da beide Momente μ_ℓ und μ_s sich bei Anlegen eines Magnetfelds in der Lage der Energieniveaus äußern, geht es also darum, eine kleine Aufspaltung oder Frequenzverstimmung dort zu finden (und genau zu vermessen, hier auf 9 Stellen!), wo bei $g_s \equiv 2$ Entartung vorläge. Für die genauesten Messungen dieser Art fängt man ein (einziges!) Elektron oder Positron in einer magnetischen Flasche ein, wo es mit Radius R und der (von R nicht abhängigen) Zyklotronfrequenz $\omega_c = eB/m_e$ senkrecht zum Magnetfeld seine Kreise zieht.³⁰ Dann ist die Energie der Bahnbewegung in Stufen $\Delta E_c = \hbar\omega_c = (e\hbar/m_e)B \equiv 2 \times \mu_B B$ gequantelt (sog. *Landau-Niveaus*).

³⁰S. Gl. (4.3).

Frage 10.4 *Woher der Faktor 2 im Abstand der Landau-Niveaus, der aussieht wie der Spin-g-Faktor, obwohl vom Spin noch gar nicht die Rede war?*

Antwort 10.4 *Der Kreisstrom macht ein magnetisches Dipolmoment $g_\ell \ell \mu_B B$ mit dem klassisch wie quantenmechanisch (für Bahndrehimpuls) richtigen g-Faktor $g_\ell = 1$. Seine potentielle Energie im Magnetfeld ist richtig $E_{mag} = \ell \mu_B B$ (Niveauabstand $\Delta E_{mag} = \pm \mu_B B$ wie z.B. bei $\Delta m_\ell = \pm 1$ im normalen Zeeman-Effekt). Allerdings entsprechen die Landau-Niveaus gar nicht den verschiedenen Zeeman-Niveaus, die bei einem festen (durch ein Atom- oder Kernniveau bestimmten) Bahndrehimpuls ℓ die Energieaufspaltung durch Richtungsquantelung wiedergeben, sondern der Zu- oder Abnahme von ℓ um $\Delta \ell = \pm 1$ (bei stets paralleler oder antiparalleler Ausrichtung $m_\ell = \pm \ell$). Zum mechanischen Drehimpuls $\hbar \ell$ gehört die kinetische Energie $E_{kin} = \frac{1}{2} m_e R^2 \omega_c^2 \equiv \frac{1}{2} (\hbar \ell) \omega_c = \ell \mu_B B$. Sie ändert sich also auch, und genau um den gleichen Betrag $\Delta E_{kin} = \Delta E_{mag}$, was den Niveauabstand exakt verdoppelt.*

Dazu kommt die Energie des Spinnmoments im selben Feld, die das Niveau je nach seiner Einstellung ($m_s = \pm 1/2$) um $E_s = \pm \frac{1}{2} g_s \mu_B$ erhöht oder erniedrigt, also jedes Landau-Niveau um $\Delta E_s = g_s \mu_B$ aufspaltet. Im Endeffekt liegt dann dicht neben jedem Niveau ein zweites, das nach Erhöhung um $\Delta \ell = 1$ und Umkehr des Spins um $\Delta m_s = -1$ (oder umgekehrt) in der Energie wie gewünscht nur um $\Delta E_s - \Delta E_c = (g_s - 2) \mu_B B = 2 a \mu_B B$ abweicht. Um diesen Abstand zu beobachten, muss man natürlich Übergänge induzieren, d.h. die Niveaus stören. Durch eine über Jahrzehnte hindurch entwickelte trickreiche Anordnung von magnetischen und elektrischen Feldern (mit absichtlichen kleinen Inhomogenitäten) sind 1987 die Messungen von a mit einer Präzision von 9 Dezimalstellen gelungen, die in den oben angegebenen Werten eine Genauigkeit im g-Faktor von $1:10^{12}$ bedeuten. Ganz wesentlich ist dabei, systematische Fehler ausschließen oder wenigstens begrenzen zu können. Hier ist z.B. der Umstand wichtig, dass es sich um Messungen an einem einzigen Elektron (oder Positron) handelt, so dass das auf die Bahn- und Spin-Bewegungen wirkende Magnetfeld wirklich immer dasselbe war [41].

Frage 10.5 *Muss man für diese Genauigkeit dann nicht wenigstens das Magnetfeld auf 9 Dezimalstellen genau wissen?*

Antwort 10.5 *Nein, jedenfalls nicht in absoluten Einheiten sondern nur in Form einer anderen Frequenzmessung: Man beobachtet gleichzeitig die Resonanz für Übergänge, bei denen sich nur der Bahndrehimpuls ändert, so dass die Frequenz ausschließlich durch $g_\ell = 1$ bestimmt ist. Im Quotienten beider Frequenzen hebt sich das Magnetfeld heraus. Er gibt den Quotienten der betreffenden Aufspaltungen an, also a/g_ℓ , mit der Genauigkeit der Frequenzmessungen relativ zueinander. Man braucht dazu noch nicht einmal eine Uhr; zwei (elektronische) Zählwerke für die Perioden würden genügen.*

Die von Hans G. Dehmelt mit dieser Methode gewonnenen Daten zeigten eine so herausragende Genauigkeit, dass er dafür schon 1989 den Nobelpreis erhielt. Trotzdem konnte auch diese Präzision noch gesteigert werden. Mit einer noch weiter verbesserten Apparatur konnte eine andere Gruppe im Jahr 2006 die Genauigkeit wieder um eine Dezimalstelle steigern, bislang aber erst am Elektron [31]. Der neue Wert:

$$g_s(e^-, 2006) = 2 \times (1 + 0.001\,159\,652\,181\,1(\pm 7)) . \quad (10.17)$$

Hier ist also doch einmal der Fall zu sehen, dass das neue und wahrscheinlich genauere Ergebnis gerade knapp außerhalb der einfachen Standardabweichung liegt, mit der (s. oben Gl. 10.16) das Ergebnis von 1987 angegeben wurde.³¹

Auf jeden Fall aber konnte die Übereinstimmung zwischen dem Elektron und seinem Antiteilchen bis zur 12. Dezimalstelle des g-Faktors gesichert werden.³²

³¹Eine alternative Erklärung möglich? Etwa: Könnten die beiden an der Ost- bzw. Westküste der USA untersuchten Elektronen-Exemplare vielleicht zufällig aus verschiedenen Chargen stammen, die bei der Produktion doch nicht ganz exakt gleich ausgefallen sind? So ein Einwand fiel bis auf weiteres unter die Kategorie "Denkverbot", mit guten Gründen (s. Identische Teilchen, Kap. 9.3.3).

³²Die theoretische Berechnung dieser Werte im Rahmen des Standardmodells, ebenfalls bis zur 12. Stelle, wird erst in Kap. 14.1 weiter dargestellt.

Über eine Möglichkeit, die Symmetrie eines Teilchen-Antiteilchen-Paars noch um sechs Stellen genauer zu prüfen, wird in Kap. 12.3.3 berichtet. Die Leitidee für so ein Experiment dürfte nach diesem Abschnitt schon auf der Hand liegen: Einen messbaren Effekt suchen, der als ganzes zur fraglichen Differenz direkt proportional ist. Dort ist es die (hypothetische) Differenz der Massen von Teilchen und Antiteilchen.

Frage 10.6 *Gibt es bei den magnetischen Momenten keinen Effekt, der auf eine eventuelle Asymmetrie zwischen Teilchen und Antiteilchen direkt ansprechen würde?*

Antwort 10.6 *Ein Beispiel: Ein eventuell nicht verschwindendes magnetisches Moment von Positronium, wenn Elektron und Positron ihre Spins parallel, ihre Momente also antiparallel ausgerichtet haben. Dies Objekt gibt es – Triplett-Positronium – es zerfällt aber leider mit ca. $\tau \approx 140$ ns Lebensdauer in drei γ -Quanten (Kap. 6.4.5 ??dort einarbeiten??), viel zu schnell für eine Wiederholung der bis zu monatelangen Messungen an dem einzelnen stabilen Elektron bzw. Positron.*

Untere Komponenten und die Antiteilchen. Für die von Diracs Gleichung neu ins physikalische Weltbild gesetzten Teilchen, die in ihrem Ruhesystem $E = -mc^2$ haben, müssen wir jetzt eine bessere Interpretation finden als die von ihm seinerzeit vorgeschlagene vollbesetzte Unterwelt. Wie schon in Kap. 9.7.6 angekündigt, deuten wir sie nach Feynmans Vorschlag zu Objekten mit positiver Energie um. Gl. (10.18) zeigt das für einen Spinor zu $m_s = -1/2$, wenn so ein Teilchen negativer Energie den Impuls \vec{p} bekommt:

$$\Psi_{p=0} = e^{-\frac{i}{\hbar} Et} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \Psi_p = e^{-\frac{i}{\hbar} (Et - \vec{p} \cdot \vec{r})} \begin{pmatrix} \frac{cp_x - icp_y}{E - mc^2} \\ \frac{-cp_z}{E - mc^2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \overline{\Psi}_{p'} = e^{+\frac{i}{\hbar} (E't - \vec{p}' \cdot \vec{r})} \begin{pmatrix} \frac{c p'_x - ic p'_y}{E' + mc^2} \\ \frac{-c p'_z}{E' + mc^2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{l} \bullet \text{ Teilchen ruht} \\ \bullet E = -mc^2 \\ \bullet m_s = -1/2 \end{array} \right] \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \bullet \text{ Teilchen hat Impuls } \vec{p} \\ \bullet E = -\sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4} \\ \bullet m_s = -1/2 \text{ (wenn } \vec{p}' \parallel z) \end{array} \right] \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \bullet \text{ Antiteilchen hat Impuls } \vec{p}' = -\vec{p} \\ \bullet E' = -E = +\sqrt{p'^2 c^2 + m^2 c^4} \\ \bullet m_s = +1/2 \text{ (wenn } \vec{p}' \parallel z) \end{array} \right] \quad (10.18)$$

Die rot markierten Umbenennungen lassen den Spinor zur negativen Energie jetzt aussehen wie einen zur positiven Energie, nur dass das Größenverhältnis von unteren und oberen Komponenten sich umgekehrt hat und die Phase im Exponentialfaktor, die das Fortschreiten der ebenen Welle beschreibt, das falsche Vorzeichen hat. Ihre normale Bedeutung erlangt die Exponentialfunktion wieder, wenn man jetzt auch noch die Vorzeichen von t und \vec{r} umdreht – d.h., dies Teilchen würde sich in einer zeit- und raumgespiegelten Welt normal verhalten³³. Damit es ein Positron wird, muss auch die Ladung umgekehrt werden.

Zusammen haben wir damit eine kombinierte Spiegelung von Raum, Zeit und Ladung vorgenommen, um vom Zustand eines realen Teilchens zum entsprechenden Zustand seines Antiteilchens zu gelangen. Warum aber sollte es dann nicht auch eine andere Masse, einen anderen g -Faktor etc. haben können? Seit den 1950er Jahren weiß man, dass die Invarianz des Hamilton-Operators gerade gegenüber dieser kombinierten 3-fach-Spiegelung eine besonders tief liegende Symmetrie der Natur ausdrückt (CPT -Theorem, Kap. 12.4.2). Damit begründet man die – bis auf Vorzeichen – perfekte Übereinstimmung von Teilchen und Antiteilchen aller Teilchenarten.³⁴

10.2.7 Chiralität

Spiel mit Formeln II. Die vier neuen Dimensionen für die Dirac-Spinoren lassen sich für zahllose weitere Einteilungen benutzen. Wir kennen bisher die zwei Unterscheidungen, die in der Standarddarstellung die Vorzüge der Unabhängigkeit voneinander und einer gewissen (wenn auch nur relativen) Anschaulichkeit

³³aber wegen der Zeitumkehr die umgekehrte Spin-Orientierung haben – s. Gl. (10.18). Für die genaueren Zusammenhänge muss hier wieder auf die speziellen Lehrbücher verwiesen werden.

³⁴Zu der Teilchen-Antiteilchen-Symmetrie von Nukleonen und anderen Hadronen s. Kap. 11, insbesondere Abb. 11.4, Kap. 11.3.3 (neutrale Kaonen) und Kap. 11.4 – das Antiproton.

bieten: die Unterscheidung nach oberen und unteren Komponenten (sprich: positive/negative Energie), und nach Komponenten mit ungerader oder gerader Nummer (“Spin auf” oder “Spin ab”). Viel weniger anschaulich – aber von der Natur offenbar mit höchster Priorität ausgestattet – ist die *chirale* Unterscheidung, die mit Hilfe einer neuen 4×4 -Matrix

$$\gamma^5 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & 0 \end{pmatrix} \quad (\equiv \alpha_x \sigma_x \equiv \alpha_y \sigma_y \equiv \alpha_z \sigma_z \equiv i\gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3) \quad (10.19)$$

formuliert wird³⁵.

Offensichtlich vertauscht γ^5 die oberen mit den unteren Komponenten des Spinors (und $\gamma^5 \gamma^5 = 1$). Eigenspinoren zu γ^5 müssen sich dabei bis auf einen Faktor reproduzieren und daher gleich große obere wie untere Komponenten haben. Das gibt es bei den Zuständen freier Teilchen im allgemeinen gar nicht (s. Gl. 10.15 und 10.18), es sei denn, sie hätten Masse $m=0$. Für diese sind die möglichen Eigenwerte $\lambda = \pm 1$. Diese Quantenzahl heißt *Chiralität* des Zustands. Nur masselose Teilchen können also eine wohldefinierte Chiralität haben, und dann haben sie auch gleich dieselbe in allen ihren möglichen Zuständen zu verschiedenen Impulsen, denn diese gehen durch Lorentz-Transformation (in Koordinaten t, x, y, z des normalen Raums, einschließlich Drehungen) auseinander hervor, und dabei bleibt der Operator γ^5 (in den vier Koordinaten des Dirac-Raums) ungeändert. Aber worin würde sich diese feste Eigenschaft masseloser Teilchen ausdrücken? Lediglich in der schon bekannten Helizität³⁶ h , denn für $m=0$ kann man auch $\gamma^5 \equiv (\hat{\sigma} \cdot \hat{p})/p = \hat{h}$ ausrechnen. Daher erklärt sich auch der Name: Chiralität bedeutet Händigkeit, den Unterschied von links und rechts herum. Aber wozu das ganze?

Bedeutung. Der neue Begriff Chiralität erlaubt, den Begriff Helizität in relativistisch invarianter Weise in das Gebiet von Geschwindigkeiten $v < c$ fortzusetzen, also für Teilchen mit Masse zu verwenden. Die relativistische Invarianz bedeutet dabei, dass man von einer Eigenschaft des Teilchens spricht, die nicht von jedem Koordinatensystem aus anders beurteilt würde. Für die Helizität h gilt das nämlich nicht (nur für Teilchen mit $m = 0$ stimmen beide Operatoren überein): Ein Elektron mit Spin in Flugrichtung bei halber Lichtgeschwindigkeit hat zweifelsfrei $h = +1$. Überhole ich es aber in meinem Koordinatensystem, hat sich für mich (nur) sein Impuls umgedreht, also sehe ich ein Teilchen mit $h = -1$. Die Chiralität aber ist durch ihre Definition im Dirac-Raum dagegen geschützt: Sie ist eine Lorentz-Invariante (ob sie nun als ein reiner Eigenwert vorliegt oder – bei Teilchen mit Masse immer – als Überlagerung mehrerer). Doch auch bis hier wäre alles noch formale Spielerei “im Geäst” der vier Koordinatenachsen des Dirac-Raums, wenn nicht eine der Grundkräfte der Natur hier einen wesentlichen Unterschied machen würde. Nach allem, was wir wissen, greift die Schwache Wechselwirkung nur an chiral linkshändigen Teilchen (und rechtshändigen Antiteilchen) an.

Noch einmal etwas genauer formuliert, im Hinblick auf die Bedeutung, die die Schwache Wechselwirkung und insbesondere die einseitige Bevorzugung einer Chiralität im physikalischen Weltbild einnimmt³⁷:

Ein Teilchen oder Antiteilchen im jeweils falschen chiralen Eigenzustand macht nach heutiger Kenntnis einfach keine Schwache Wechselwirkung. Wenn es nicht ganz in dem richtigen Eigenzustand vorliegt, sondern als Linearkombination beider Chiralitäten, dann beteiligt sich nur die richtige Komponente an der Wechselwirkung. Man kann sie mit einem der Projektionsoperatoren $\Pi^\pm = 1/2(1 \pm \gamma^5)$ aus jedem Zustand herauspicken.

Konkret: Was ist der Unterschied zwischen Helizität und Chiralität eines Elektrons, das mit Energie E und Impuls p parallel zur z -Achse fliegt? Nehmen wir eins mit Spin “rechts herum”, also Helizität $h = +1$, dann hat es den Spinor wie in Gl. (10.15, mit $p_x = p_y = 0$), und seine Chiralität ist der

³⁵Gesprochen “gamma 5”. Der Index 5 erklärt sich daraus, dass γ^5 das Produkt aller vier γ^μ -Matrizen ist. Die in Gl. 10.19 explizit angegebene Matrix gilt in der Standarddarstellung, die $\mathbf{1}$ bedeutet wieder die 2×2 -Einheitsmatrix.

³⁶Dieser Umstand stiftet oft Verwirrung zwischen beiden Begriffen.

³⁷Die Konsequenz ist die Verletzung der Spiegelinvarianz, der in Kap. 12.2 eine eigene Darstellung gewidmet wird.

Erwartungswert des Operators γ^5 hierfür. Das Ergebnis³⁸ ist $\langle \gamma^5 \rangle = pc/E \equiv v/c$. Da die chiralen Eigenwerte ± 1 sind und der Erwartungswert ihr gewichteter Mittelwert, besteht dies Elektron zu $1/2(1 - v/c)$ aus einem Anteil mit linkshändiger Chiralität, und zu $1/2(1 + v/c)$ rechtshändiger. Da solche Linearkombinationen von zwei Basiszuständen sich immer trivial umdrehen lassen³⁹, gilt genau so: Für ein rein rechts-chirales Elektron ist der Erwartungswert der Helizität $h = v/c$. D.h. bei Messung der Polarisierung in z -Richtung kommt mit Wahrscheinlichkeit $1/2(1 + v/c)$ das Ergebnis "Spin nach vorne", zu $1/2(1 - v/c)$ "Spin nach hinten". Die Messwerte an β -Teilchen aus radioaktiven Zerfällen ergaben immer $h = -v/c$ (s. Kap. 12.2.5, ((mit Kap. 6.5 /12.2.5 abstimmen))). Das passt genau zu dem oben erwähnten Befund: Die Schwache Wechselwirkung erzeugt Elektronen nur mit dem Merkmal links-chiral.

10.2.8 Spin, Statistik, Symmetrie

Klassische Statistik mit identischen Teilchen. Mit Beginn der Quantenmechanik wurde ab 1926 herausgearbeitet, dass zwei mikroskopische Teilchen einander so sehr gleichen können, dass man sich bereits in Widersprüche verwickelt, wenn man sie nur symbolisch mit verschiedenen Namen eindeutig kennzeichnen will.⁴⁰ Einen Hinweis auf dieses Problem hatte es schon in der klassischen Physik gegeben, in der vor allem von Boltzmann erarbeiteten statistischen Deutung des thermodynamischen Gleichgewichts (vgl. Kap. 1.1.1). Die Deutung beruht auf dem einfachen Abzählen aller derjenigen genauen (Mikro-)Zustände eines Viel-Teilchensystems, die sich im Großen, also mit makroskopischen Messwerten charakterisiert, gar nicht unterscheiden lassen. Dieses erfolgreiche Rezept enthielt allerdings die als Gibbs'sches Paradoxon bezeichnete Anweisung, an Stelle von zwei Mikrozuständen immer nur einen zu sehen, wenn beide sich nur durchs Vertauschen zweier *gleicher* Teilchen unterscheiden, mithin *invariant* gegenüber der Teilchenvertauschung sind. Versieht man jedes Teilchen mit einer eigenen Nummer, kommt so für den wahrscheinlichsten aller Makrozustände die klassische Boltzmann-Verteilung heraus. 1924 fand Bose, dass man auch die Plancksche Formel für die Photonen der Wärmestrahlung gewinnen kann, wenn man Ununterscheidbarkeit der Teilchen ansetzt, Ruhemasse Null und die Eigenschaft, sich in beliebiger Anzahl im selben 1-Teilchen-Zustand aufhalten zu können [9]. Einstein erweiterte Boses Methode auf Teilchen mit beliebiger Masse und kam so zur *Bose-Einstein-Statistik* [17]. Die wurde auch gleich für Elektronen als gültig angenommen, bis Pauli 1925 zeigen konnte, dass es für die variierenden Eigenschaften der Atomhüllen bis hin zu ihrem chemischen Verhalten im wesentlichen einen einzigen Grund gibt: dass beim sukzessiven Aufbau aus Elektronen jeder einmal besetzte Zustand für alle weiteren ausgeschlossen ist [33]. Ein Jahr später machte Fermi dies Paulische Ausschließungsprinzip zum Ausgangspunkt einer neuen Berechnung des statistischen Gleichgewichtszustands und fand dabei die nach ihm benannte Statistik [18]⁴¹. In beiden Fällen sah man in den neuen Statistiken Abweichungen vom klassischen Verhalten mit wichtigsten Konsequenzen für die Beschaffenheit unserer Welt.

Frage 10.7 *Die Auswirkungen werden oft so beschrieben: Bosonen ziehen sich an, Fermionen stoßen sich ab. Ist das an einem einfachen Beispiel nachzuvollziehen?*

³⁸Das Elektron hat den Spinor $(1, 0, \frac{p}{E+mc^2}, 0)$ aus Gl. (10.15). Für den Erwartungswert muss man zwei Skalarprodukte ausrechnen: Erstens das Skalarprodukt des Spinors mit sich selbst (die Norm): $(1, 0, \frac{p}{E+mc^2}, 0) \cdot (1, 0, \frac{p}{E+mc^2}, 0) = 1 + (\frac{p}{E+mc^2})^2$. Zweitens das Skalarprodukt des Spinors selbst mit dem durch γ^5 transformierten Spinor (das unnormierte Matrixelement): $(1, 0, \frac{p}{E+mc^2}, 0) \cdot (\frac{p}{E+mc^2}, 0, 1, 0) = \frac{2p}{E+mc^2}$. Der Quotient beider Werte gibt den Erwartungswert $\langle \gamma^5 \rangle$ an, er ist gleich pc/E . Die Umrechnung in v/c ergibt sich einfach mit Hilfe von $E = mc^2/\sqrt{1 - (v/c)^2}$ und $E^2 = p^2c^2 + m^2c^4$.

³⁹Geometrisch ausgedrückt: Hat man zwei Einheitsvektoren mit einem Winkel ϑ dazwischen, und projiziert man den einen auf den anderen, heißt das Ergebnis immer $\cos \vartheta$, ganz gleich welcher auf welchen projiziert wurde.

⁴⁰Siehe die Interferenz von Target- und Projektil in Stößen identischer Teilchen in Kap. 5.7.2, die Austauschsymmetrie des Protons und anderer Kerne in Molekülen, Kap. 7.1.5, und den Abschnitt über die Identität von Elementarteilchen 9.3.3.

⁴¹Später Fermi-Dirac-Statistik genannt, weil Dirac sie ein paar Monate später noch einmal erfand. Nach Fermis Hinweis, dass er das alles schon einmal bei ihm gelesen haben musste, räumte Dirac ein, dass ihm das wohl entfallen sei, weil er seinerzeit noch nicht so weit gewesen war, die grundlegende Bedeutung dieser Statistik zu würdigen. (Vielleicht aber verdankt sich die allgemeine Verbreitung dieses Doppelnamens auch einer Vorliebe für Symmetrie, weil nämlich die andere Quanten-Statistik auch einen Doppelnamen trägt?) Dirac schlug dann 1940 vor, diese grundsätzliche Klassifizierung physikalischer Teilchen durch die Namen Boson und Fermion zu beschreiben.

Antwort 10.7 *Der allereinfachste Fall überhaupt: 2 Teilchen verteilen sich auf 2 Zustände. Im klassischen Normalfall gibt es 4 Mikrozustände, die bei völliger Unordnung (also höchsten Temperaturen) demnach jeder mit 25% Wahrscheinlichkeit anzutreffen sind. Einen gepaarten Mikro-Zustand, d.h. mit beiden Teilchen im selben 1-Teilchen-Zustand, gibt es darunter zweimal, also zu 50%. Die übrigen Mikro-Zustände – bei klassischer Zählung zwei – werden nun für identische Teilchen nur als einer gezählt. Folglich steigt der Anteil der beiden gepaarten Zustände für zwei gleiche Bosonen auf 67%. Für Fermionen aber gibt es gerade diese zwei gepaarten Zustände gar nicht, man findet sie zu 100% voneinander getrennt.*

Frage 10.8 *Welche Begriffsverwirrung ist an der Formulierung der vorigen Frage zu kritisieren?*

Antwort 10.8 *Wenn zwei Dinge einander anziehen oder abstoßen, dann ist (schon von den Worten her) immer das Wirken einer Kraft gemeint. Damit hat das unterschiedliche Verhalten von Bosonen und Fermionen aber gar nichts zu tun; über die Energie der gepaarten bzw. verteilten Anordnungen wurde ja nichts gesagt. Andererseits muss man dem Alltagsverstand diese Verwirrung nachsehen: Dass z.B. auch bei stärkster Anziehungskraft oder größtem äußeren Druck zwei gleiche Fermionen nicht in den selben Zustand kommen können, kann er sich nur durch das Wirken einer noch stärkeren Abstoßungskraft vorstellen. Wenn das aber so wäre, dann könnte man sie mit wiederum noch höherem “Kraftaufwand” doch zusammenzwingen – echte Fermionen aber eben nicht.⁴² Fazit: Für das, was in der modernen Physik “Ununterscheidbarkeit identischer Teilchen” heißt, gibt es in der vom Alltagsleben bestimmten Anschauung keine Entsprechung. (Vgl. auch Kap. 9.3.3.)*

Frage 10.9 *In Antwort 10.7 klingt eine Erhöhung von 50% auf 67% für das paarweise Auftreten der Bosonen nicht gerade nach Phasenübergang. Wie geht daraus etwas so dramatisches wie z.B. die Supraleitung hervor?*

Antwort 10.9 *Die gemeinsame Besetzung einer Zelle wird bei Bosonen im Vergleich zu unterscheidbaren Teilchen statistisch bevorzugt, weil die Bezugsgröße (die Zahl aller Mikrozustände) schrumpft, und zwar bei N Bosonen um den Faktor $N!$. Für $N \approx 10^{20}$ ($\hat{=} \sim 1$ mg Substanz) ist $N! \approx N^{(N-1/2)} \approx 10^{20(10^{20})}$. Bei dieser immensen Größe spielt es dann auch keine Rolle mehr, wenn bei der Supraleitung (und den anderen Bose-Einstein-Kondensationen) dieser gigantische Faktor gar nicht voll zum Tragen kommen kann, weil die kondensierenden Bosonen (nämlich Paare aus Elektronen – Cooper-Paare – oder anderen Teilchen) gar keine richtigen Bosonen sind, eben weil sie aus Fermionen bestehen und deshalb doch nicht zu mehreren den exakt gleichen Zustand einnehmen können. Es genügt, dass sie annähernd die für Bosonen geltenden Vertauschungsregeln (s.u.) erfüllen.*

Es wird aufgefallen sein, dass bis hierher von der Quantenmechanik nicht die Rede sein musste. In der Tat war es gerade die statistische Physik mit ihren bei vielen Phänomenen überzeugenden Begründungen⁴³, die dem neuen Zustandsbegriff der Quantenmechanik und den darauf aufbauenden Quantisierungsregeln zu Ansehen verhalf (s. Kasten 5.1 und Anmerkungen dort). Wie aber die Rezepte der statistischen Physik, hier insbesondere die beiden Rezepte zur Ununterscheidbarkeit mit ihren für Bosonen und Fermionen so gegensätzlichen möglichen Folgen, näher zu verstehen wären, das blieb zunächst vollständig im Dunkeln.

⁴²Hinzu kommt beim Versuch, das anschaulich auszudrücken, möglicherweise eine unbedachte Gleichsetzung von “Zustand” mit “Ort” (oder kleinem Raumgebiet). Das Pauli-Prinzip oder die antisymmetrische Wellenfunktion verhindert das Zusammentreffen zweier Elektronen an einem Raumpunkt nur, wenn sie auch noch gleichen Spin haben sollen. In einem noch so kleinen Volumen kann man beliebig viele Elektronen unterbringen, sie müssen sich nur in Energie, Drehimpuls oder in irgendeiner anderen messbaren Größe unterscheiden. Sind die tieferen Niveaus schon besetzt, kostet das Hinzufügen weiterer Elektronen daher zunehmend mehr Energie. Dies aber nicht, um ihre Zustände irgendwie ähnlicher zu machen: die sind und bleiben orthogonal.

⁴³angefangen mit der Planckschen Strahlungsformel 1900

Quanten-Statistik. Der nächste Schritt gelingt, indem die neuen Begriffe, die die Quantenmechanik für Zustände allgemein vorschreibt – Vektoren oder Funktionen – auf Zwei-Teilchen-Zustände angewandt werden (Heisenberg und (unabhängig) Dirac 1926, [15][22][23]).

Den wesentlichen Unterschied zur klassischen Mechanik macht hier wieder einmal der Welle-Teilchen-Dualismus. Aus zwei Zuständen (\vec{r} , \vec{p}) desselben Massenpunkts kann man dort keinen Überlagerungszustand bilden, hier aus zwei Wellenfunktionen oder Zustandsvektoren aber doch. Umgekehrt kann man einen quantenmechanischen Zustand in Komponenten zerlegen, z.B. immer in eine symmetrische und eine antisymmetrische, bezogen auf irgendeine Art von Vertauschung.

Frage 10.10 *Gilt das für jede Art Vertauschung? Z.B. für die Spiegelung $x \rightleftharpoons -x$?*

Antwort 10.10 *Ja. Zerlege $f(x) \equiv f^+(x) + f^-(x)$, wobei die symmetrische bzw. antisymmetrische Komponente einfach durch $f^\pm(x) = 1/2[f(x) \pm f(-x)]$ gegeben ist. Ist f schon eine symmetrische Funktion, kommt für die antisymmetrische Komponente dabei Null heraus, und umgekehrt.*

Hat eine Funktion zwei Variable – im interessierenden Fall die Koordinaten von zwei gleichen Teilchen –, kann man diese miteinander vertauschen und dann statt über Symmetrie bzw. Antisymmetrie im Spiegel (wie in Frage 10.10) über Symmetrie bzw. Antisymmetrie bei Vertauschung reden. Das sind schon zwei Alternativen, genauso viel wie man für die Entscheidung zwischen Bose-Einstein und Fermi-Dirac-Statistik braucht, und weitere Möglichkeiten gibt es in diesem Formalismus auch nicht. Es ergibt sich sofort, dass eine antisymmetrische Funktion (wenn sie für beliebige zwei Teilchen des Systems gelten soll) automatisch das Pauli-Prinzip und damit die Fermi-Statistik zur Folge hat, während eine symmetrische Funktion genau so direkt zur Bose-Einstein-Statistik führt.

Zum Ende der 1920er Jahre hin häufte sich die experimentelle Evidenz, die schließlich im Spin-Statistik-Theorem zusammengefasst wurde⁴⁴:

Spin-Statistik-Theorem: Symmetrie und Spin sind nicht beliebig kombiniert. Alle Wellenfunktionen von je zwei identischen Teilchen, Kernen, Atomen etc. mit halbzahligem Spin zeigen bei Vertauschung die Antisymmetrie (-1), und die mit ganzzahligem Spin die Symmetrie ($+1$).

Spin-Statistik-Theorem. Muss sich nicht ein tieferer Grund finden lassen, wenn die Natur eine so einfache und offenbar allgemein gültige Auswahl von zwei der vier möglichen Kombinationen trifft?

Philosophisch gesehen nicht. Ein häufig vorliegender und gar nicht so tiefer Grund ist, dass der benutzte Formalismus einfach noch an einem Überschuss an Möglichkeiten krankt, also “rein formal” mehr zulässt als der Wirklichkeit entspricht. Beispiele dafür gibt es viele, etwa den beliebigen konstanten Phasenfaktor an der Wellenfunktion. Interessanter ist vielleicht das Beispiel der negativen Wurzel aus der relativistischen Energie-Impuls-Beziehung, bevor sie über Dirac und Feynman doch eine unverzichtbare Bedeutung erhielt. In dem Bereich der überschüssigen formalen Möglichkeiten gedanklich zu spekulieren, kann bis zur *science fiction* reichen, ist aber auch immer wieder fruchtbar für den Fortschritt der Wissenschaft gewesen. Auch die folgenden Kapitel sind voll von weiteren Beispielen.

Kein Beweis für einen ausreichenden Grund, aber ein naheliegender Gedanke:

- Wenn ein klassisches Feld (Beispiel: das elektromagnetische Feld ($\Phi/c, \vec{A}$)) mit messbarer Feldstärke vorliegt, ist das nach dem Vorgehen der Zweiten Quantisierung durch die Anwesenheit vieler Feldquanten im selben Zustand zu interpretieren (Beispiel: das kohärente Licht des Lasers, aber auch jede Radiowelle)⁴⁵. Automatisch ergeben sich bei dieser Deutung sowohl die ganzzahlige Quantelung des Drehimpulses⁴⁶ als auch die positive Symmetrie der Wellenfunktionen (aufgrund der Vertauschungsregeln für Erzeugungs- und Vernichtungsoperator, s.u.), also Feldquanten vom Typ Boson.

⁴⁴wobei Vertauschung sich immer auf alle Koordinaten erstreckt, Spin eingeschlossen

⁴⁵Dabei schließen Eigenzustände zur Feldstärke und zur Photonenzahl sich übrigens gegenseitig aus, denn der Operator zur Feldstärke hat die Form einer Summe aus Erzeugungs- und Vernichtungsoperator $\hat{A} \propto \hat{a}^\dagger + \hat{a}$, genau so wie beim Vorbild des Verfahrens, dem harmonischen Oszillator, die Ortskoordinate $\hat{x} \propto \hat{a}^\dagger + \hat{a}$ (s. Kasten 7.5).

⁴⁶S. Kap. 7.6.2 – Dreidimensionaler harmonischer Oszillator.

- Da bleibt für Feldquanten mit halbzahligem Spin nur übrig, dass sie kein klassisches Feld bilden dürfen, also nicht in großer Zahl denselben Zustand bevölkern können, was in der Sprache der Wellenfunktion zu der einzigen Alternative zwingt, der Antisymmetrie.

Ein echter Beweis des Spin-Statistik-Theorems ist außerordentlich schwer zu führen. 1940 vollendete Pauli den ersten unter Zuhilfenahme tief liegender Argumente aus der relativistischen Quantenfeldtheorie. Nach mehrfachen Verbesserungen durch andere Forscher konnte man 1958 feststellen: Die Vertauschungssymmetrie ist festgelegt durch die vereinten Forderungen nach Lorentz-Invarianz, nach Existenz eines Zustands niedrigster Energie, nach positiv definiten Metrik des Zustandsraums, und nach dem Verbot gegenseitiger Beeinflussung der Felder schneller als die Lichtgeschwindigkeit. Doch beklagte noch in 1960er Jahren Feynman, man habe das Problem offenbar nicht richtig verstanden, denn niemand könne die Argumentation einfach formulieren. Daran hat sich erst kürzlich ein wenig geändert, als ein Teil des Beweises auf eine einfache Beobachtung bei der Addition von Drehimpulsen zurückgeführt werden konnte. Diese wurde schon in Kap. 7.3 hervorgehoben: Addiert man zwei gleiche Drehimpulse I zum Gesamtdrehimpuls Null, dann ist der Zustand für $I = 1/2$ (und alle halbzahligen Werte) antisymmetrisch bei Vertauschung, bei ganzzahligem $I = 0, 1, \dots$ aber symmetrisch.⁴⁷ Wie überträgt sich diese ziemlich spezielle Vorzeichenfrage in das allgemeine Spin-Statistik-Problem? Dazu muss es hier bei Andeutungen bleiben: In dem feldtheoretischen Ausdruck für die Energiedichte tauchen (das ist eine der Voraussetzungen, die man machen muss) Produkte von jeweils zwei Feldoperatoren des betreffenden Teilchens auf. Dieser Ausdruck muss im Ergebnis rotationsinvariant sein (z.B. wie in der Strom-Strom-Kopplung in Form eines Skalarprodukts), sonst würde er die Drehimpulserhaltung stören. Dazu müssen diese Produkte so zusammengefügt werden wie bei der Addition der beiden Teilchenspins zum Gesamtspin Null. Damit stehen die je nach Halb- oder Ganzzahligkeit Spin I verschiedenen Vorzeichen der Kopplung nun in dieser Gleichung für die Energiedichte, aus der sich alles weitere richtig ergeben kann – wenn denn das Vorzeichen bei Vertauschung zweier Feldoperatoren entsprechend gewählt wird.

Hiermit ist der Überblick über die Dirac-Theorie beendet. Sie wurde für das Elektron entwickelt, gilt aber ohne Einschränkung für alle elementaren Teilchen mit Spin $1/2$: die Leptonen und Quarks. Mit den weiteren Entdeckungen in der Gruppe der Leptonen, zu der auch das Elektron gehört, beschäftigt sich der Rest dieses Kapitels.

10.3 Die weiteren Leptonen

Vielerlei experimentelle und theoretische Verzahnungen mit der Erforschung der Hadronen werden hier mit Querverweisen auf kommende Kapitel angeführt. Beim ersten Lesen braucht man ihnen nicht zu folgen.

10.3.1 Myonen

Überraschung im Nulleffekt. Alle Detektoren für ionisierende Strahlung zeigen einen *Nulleffekt*, der sich auch bei bester Abschirmung (1 km Meerestiefe z.B.) nicht ganz unterdrücken lässt. Im Jahr 1937 wurde nach langem Vermuten die Ursache identifiziert [39]: Es sind hochenergetische geladene Teilchen aus der Höhenstrahlung, mit einer Masse um etwa 100 MeV, also zwischen Elektron und Proton und deshalb erst Barytron genannt, dann Mesotron, Meson, μ -Meson und jetzt seit langem Myon (μ). Nur zwei Monate später wies Oppenheimer auf eine sonst unbekannt gebliebene japanische Veröffentlichung von Hideki Yukawa hin, der schon zwei Jahre vorher über so ein Teilchen spekuliert hatte, um die kurzreichweitige Kraft zwischen Proton und Neutron analog zur Quantenelektrodynamik als Austauschkraft verstehen zu

⁴⁷Die Ursache hierfür liegt wirklich im elementaren Bereich der natürlichen Zahlen: (1) Der Zustand zum maximalen Gesamtdrehimpuls $I_{gesamt} = 2I$ muss immer symmetrisch sein. (2) Beim Herabsteigen um $\Delta I = -1$ muss sich die Symmetrie bei jedem Schritt ändern, um orthogonale Zustände zu erhalten. (3) Die Zahl der Schritte bis $I_{gesamt} = 0$ ist bei ganzzahligem I eine gerade Zahl, bei halbzahligem I eine ungerade. (4) Folglich ist der Zustand zu $I_{gesamt} = 0$ für Teilchen mit ganzzahligem Spin I symmetrisch, für die anderen antisymmetrisch.

können. Wieder waren also, wie schon fünf Jahre zuvor beim Positron, die Experimentalphysiker über ein neues Teilchen gestolpert, ohne die einschlägigen Ansätze der Theoretiker in irgendeiner Weise genutzt zu haben oder überhaupt zu kennen. Dies Verhältnis änderte sich nun aber grundlegend und für dauernd, wollte man doch endlich dem Rätsel der Kernkräfte auf die Spur kommen.

Bestätigte Theorie I. Konkrete theoretische Vorüberlegungen gaben den weiteren Forschungen und Interpretationen die Richtung vor. Als Messungen der Intensitätsverteilungen der Myonen in verschiedener Höhe und nach Durchdringen verschiedener Materiedicken (z.B. schräg durch die Atmosphäre) ein unerwartetes Verhalten zeigten, schlug Heisenberg die nach Yukawas Theorie nächstliegende Deutung vor: Das Teilchen könnte instabil sein, in etwa $1 \mu\text{s}$ von allein zerfallen. So wurde 1940 mit einer elektronischen Verzögerungsschaltung zwischen Geiger-Zählern die statistische Verteilung der Zeitdifferenz zwischen dem Signal für Ankunft (d.h. Abbremsung) eines Myons in einer Messingplatte und dem nachfolgenden Signal der in seinem Zerfall entstehenden hochenergetischen Strahlung aufgenommen (Abb. 10.1). Die Voraussage bestätigte sich. Die erste Beobachtung eines instabilen Elementarteilchens war gelungen, sie zeigte ein exponentielles Zerfallsgesetz mit $\tau = 2.15 \pm 0.07 \mu\text{s}$ Lebensdauer⁴⁸. Die beim Zerfall entstehenden Teilchen wurden durch ihre Ionisationsspuren als Elektronen bzw. Positronen identifiziert. Auch das passte gut zur Yukawa-Theorie, die von Austauschpartikeln positiver und negativer Ladung ausgeht. Damit war auch die Beobachtung erklärt, warum von den im Messing abgebremsten Myonen immerhin etwa 50% überhaupt noch soviel Zeit haben für ihren freien Zerfall (bei dem das hochenergetische e^+/e^- entsteht): Es sind nur die positiven unter ihnen, denn die negativen werden durch die langreichweitige Coulombkraft zu den Kernen hingezogen und können dann (und sicher viel schneller) von einem Proton absorbiert werden (das sich im Sinne der angenommenen starken Austauschwechselwirkung dabei nach $p + \mu^- \rightarrow n$ in ein Neutron umwandelt und damit allenfalls den Kern radioaktiv macht).

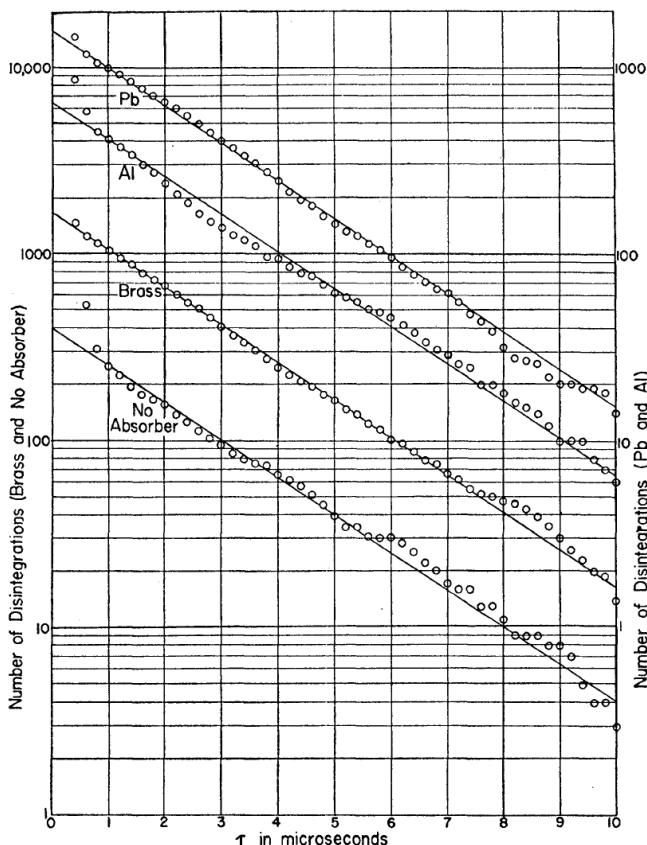


Abbildung 10.1: Die Zahl der beobachteten Koinzidenzen als Funktion der Mindestzeit zwischen Ankunft eines Teilchens im Absorber und seinem Zerfallssignal. Die vier Messkurven entsprechen verschiedenen Absorber-Materialien (unten: ohne Absorber, abgesehen vom Konstruktionsmaterial der Zählrohre). Alle verlaufen exponentiell mit der gleichen Lebensdauer. Abb. aus [30].

⁴⁸Damaliger Wert. Heute: $\tau = 2.197019(\pm 21) \mu\text{s}$ [1].

Bestätigte Theorie II. Während ihrer kurzen Lebensdauer könnten Myonen selbst bei Lichtgeschwindigkeit nur ca. 600 m weit fliegen. Da sie in der Höhenstrahlung in etwa 15 km Höhe erst erzeugt werden, müsste ihre Anzahl eine starke Höhenabhängigkeit zeigen: pro 4 km (entsprechend 7 Lebensdauern oder 10 Halbwertzeiten) einen Faktor $2^{10} \approx 1000$. Im Gegensatz zu dieser Abschätzung kommen die Myonen aber nur wenig abgeschwächt bis auf die Erdoberfläche herunter. Dies Phänomen wurde anfangs als ein Rätsel wahrgenommen, wurde aber nach der schnell gefundenen Deutung zur ersten direkten Demonstration der relativistischen Zeitdilatation. Bei typischer Energie $E \sim 1$ GeV (es gibt aber auch viel langsamere Myonen) und einer Ruhemasse von rund $m_\mu c^2 = 100$ MeV ist der Lorentz-Faktor $\gamma = 1/\sqrt{1-v^2/c^2} = E/m_\mu c^2 \approx 10$ und die Lebensdauer um genau soviel länger (für uns als Beobachter; denn vom Myon aus gesehen ist die Lebensdauer nur $2 \mu\text{s}$, aber die Erde um denselben Faktor γ näher).

Ungeliebte Überraschung. Yukawas Vorschlag erwies sich als so grundlegend wichtig, dass ihm im folgenden Kapitel über die Teilchen mit starker Wechselwirkung ein ganzer Abschnitt gewidmet ist. Für das Myon aber ging die Geschichte anders weiter als erwartet: Es kann nicht Yukawas Teilchen sein, denn es reagiert viel zu wenig mit den Kernen. Das kann man eigentlich einfach abschätzen:

Frage 10.11 *Wie viel Atomkerne hat ein Myon auf seinem Weg durch die Atmosphäre schon durchschlagen, wenn es unten ankommt?*

Antwort 10.11 *Für die Kerne (Stickstoff und Sauerstoff): $A = 15 \pm 1$, somit Radius und Querschnitt: $R \approx 1.2 \text{ fm } A^{1/3} \approx 3 \text{ fm}$, $\sigma = \pi R^2 \approx 30 \text{ fm}^2$.*

Die Atmosphäre hat pro cm^2 die Masse 1 kg ("Druck"-Einheit im Alltag: $1 \text{ atm} \approx 1 \text{ kg}/\text{cm}^2$). 1 kmol Atome ($\hat{=} A \text{ kg}$) reicht also für die ganze Atmosphäre über 15 cm^2 Bodenfläche. Die gesamte Querschnittsfläche aller N_A Kerne darin beträgt $N_A \sigma = 6 \times 10^{26} \times 30 \text{ fm}^2 \approx 180 \text{ cm}^2$. Die Kerne allein überdecken die Erdoberfläche also ca. 12-fach.

Doch die Physiker brauchten fast 10 Jahre, um nach stetig anwachsender Verunsicherung von der schönen Bestätigung der Yukawa-Theorie durch das Myon Abschied zu nehmen. Die Enttäuschung darüber, dass dieses neue Teilchen die ihm zuge dachte Rolle in der Welt nicht ausfüllen konnte, drückte Rabi mit dem legendär gewordenen Seufzer aus: "Wer hat denn das bestellt?" Den Ausschlag ergab die genaue Prüfung, ob der oben erwähnte (zunächst nur angenommene) Einfluss des Ladungsvorzeichens auf das weitere Schicksal der abgebremsten Myonen wirklich besteht und ob er vom Material abhängt [11]. Das Experiment überzeugte besonders durch seinen vergleichenden Charakter, der alle sonst leicht möglichen systematischen Fehler weitgehend ausschließt. Es bestand aus einer Messreihe mit zwei Abbremsmaterialien (Eisen und Kohlenstoff) und jeweils beiden Myonensorten (μ^\pm) bei sonst gleichbleibender Apparatur. Der Wechsel des Ladungsvorzeichens wurde durch bloßes Umpolen eines Magneten erreicht (stark genug, um immerhin die Myonen, die sich in der anschließenden 3 cm dicken Platte auch abbremsen lassen würden, gut sortieren zu können), der Wechsel des Materials durch einfachen Austausch der Platten. Mit einer Koinzidenzschaltung mehrerer Zählrohre vor und nach den Platten konnte eindeutig identifiziert werden, ob das Myon wirklich gestoppt worden war und – wenn ja – ob es dann im Rahmen der erwarteten Verzögerung das Signal seiner Umwandlung in Elektron oder Positron erzeugt hatte. Ergebnis: In Eisen ($Z=26$) kommen diese Signale tatsächlich nur von den positiven Myonen, in Kohlenstoff ($Z=6$) aber auch von den negativen! Das erste Resultat bestätigt, dass der Versuch richtig durchgeführt wurde, das zweite zeigt, dass die negativen Myonen mit den Nukleonen der Kohlenstoffkerne nicht reagieren. Als Verursacher der Kernkraft konnten die Myonen danach nicht mehr angesehen werden.

Aber mit Eisenkernen reagieren sie doch? Wie kann man den Unterschied zwischen beiden Materialien interpretieren? Als nächstes kommt die Schwache Wechselwirkung in Frage. Sie wurde schon in Fermis Theorie der β -Strahlen als kurzreichweitig erkannt, ermöglicht aber den Elektronen-Einfang (EC), hier also $\mu^- + p \rightarrow \nu_\mu + n$. Die eingefangenen μ^- Myonen bilden ein myonisches Atom und springen auf das $1s$ -Orbital hinunter (unter Aussendung von charakteristischer Röntgenstrahlung im entsprechenden Energiebereich, wie später richtig gefunden wurde, siehe z.B. Abb. 6.15). Im Vergleich zu Elektronen kommen sie dem Kern zwar viel näher, aber ihr Bohrscher Radius ist immer noch viel größer als der Kernradius. Jedoch reichen die die Wellenfunktionen mit $\ell = 0$ bis zum Ursprung mit endlicher Dichte, und diese variiert wie Z^3 , denn die lineare Skala (Bohrscher Radius) variiert wie Z^{-1} . Im

Eisenkern ist die Myonendichte daher $(26/6)^3 \approx 80$ mal größer als im Kohlenstoffkern. Außerdem ist das Kernvolumen im Verhältnis der Massenzahlen größer ($56/12 \approx 4.5$), zusammen ein Unterschied um einen Faktor fast 400 für die Aufenthaltswahrscheinlichkeit des Myons in Kernmaterie. Um den gleichen Faktor unterscheidet sich dann die Reaktionsrate bei Schwacher Wechselwirkung. Für $Z=6$ ist sie offenbar noch zu gering, um sich gegenüber dem freien Zerfall in ein hochenergetisches Elektron bemerkbar zu machen, bei $Z=26$ ist es schon umgekehrt.

Was ist das Myon? Wenn es nicht das erwartete Yukawa-Teilchen ist, was ist es dann? Seine Masse war durch die Ionisationsspuren (vgl. Theorie der Abbremsung nach Bohr, Bethe und Bloch, Kap. 2.2) zu etwa 200 Elektronenmassen bestimmt (entsprechend ca. 100 MeV). Weiteres konnten nur die Zerfallsprodukte verraten. Aus den Spuren der entstandenen Elektronen oder Positronen in der Nebelkammer oder Fotoplatte war lediglich abzulesen, dass ihr Energiespektrum kontinuierlich ist wie bei der β -Radioaktivität, aber schon etwa bei der Hälfte der Maximalenergie endet [26]. Abb. 10.2 zeigt dies an einem Spektrum, wie es mit ganz anderer Technik und erst 15 Jahre später aufgenommen werden konnte; doch selbst die ältere unpräzise Beobachtung allein erlaubte schon weitreichende Schlüsse: Das kontinuierliche Spektrum beweist einen Zerfall in (mindestens) drei Teilchen, seine Obergrenze bei $\frac{1}{2}m_\mu c^2$ zeigt, dass alle drei nur geringe Masse haben, so dass sie hoch-relativistisch sind. Dann nämlich folgt diese Obergrenze (mit dem Ansatz $\mu \rightarrow e + \text{zwei ungeladene leichte Teilchen}$, hier als $\nu_1 + \nu_2$ bezeichnet) sofort aus der Energie- und Impuls-Erhaltung:

Das Elektron hat maximale Energie E_{\max} bei maximalem Impuls, und dazu müssen ν_1 und ν_2 parallel zueinander und entgegengesetzt zum Elektron wegfliegen. Damit heißt der Impulssatz in Beträgen $p_e = p_{\nu_1} + p_{\nu_2}$, und für die Gleichung zur Energieerhaltung folgt⁴⁹:

$$m_\mu c^2 = E_{\max} + E_{\nu_1} + E_{\nu_2} \approx cp_e + cp_{\nu_1} + cp_{\nu_2} = 2cp_e = 2E_{\max}$$

Das Myon ein schweres Elektron? Ein *angeregtes* Elektron konnte das Myon jedenfalls nicht sein, weil dann der elektromagnetische Übergang $\mu \rightarrow e + \gamma$ (mit nur zwei leichten Zerfallsprodukten und daher festliegender Energieverteilung) möglich sein und die Lebensdauer auch sehr viel kürzer sein müsste. Daher können die beiden entstehenden leichten Teilchen nur noch Neutrinos sein, was den Zerfall mit der β -Radioaktivität verwandt macht. Hier verbindet dieser Prozess nun aber nicht die Änderung eines Nukleons mit zwei (entstehenden/vernichteten) Leptonen, sondern vier Leptonen miteinander. Um die beobachteten und die nicht beobachteten Umwandlungen (z.B. nach dem Einfang am Kern *niemals* $\mu^- + p \rightarrow e^- + p$) zu deuten, wurde versuchsweise ein neuer Erhaltungssatz ausprobiert [25]: Jedes Lepton trägt eine Einheit *Leptonenladung* (Antiteilchen negativ), und die gesamte Leptonenladung bleibt konstant. Kurioserweise wurde dabei das μ^- im Gegensatz zu heute als Antilepton mit negativer Leptonenladung angesehen, um die Unmöglichkeit des elektromagnetischen Übergangs $\mu^- \rightarrow e^- + \gamma$ zu begründen⁵⁰. Von solchen Anfangsirrümern abgesehen, bedeutet dies Bild jedoch einen konzeptuellen Durchbruch: Eine neue Art Ladung wird in die Physik eingeführt, zusammen mit ihrem Erhaltungssatz. Der Zerfall des Myons muss so aussehen:

$$\mu^\pm \rightarrow e^\pm + \nu + \bar{\nu} \quad (10.20)$$

Mit dem Elektron sind es dann drei Fermionen als Zerfallsprodukte, daher muss auch der Spin des Myons halbzahlig sein. Das Myon ist also ein geladenes Teilchen mit Spin $\frac{1}{2}$, das nicht an der Starken Wechselwirkung teilnimmt, genau wie das Elektron. Ist es auch ein Dirac-Teilchen, nur mit anderer Masse? Unterscheidet es sich sonst irgendwie vom Elektron?

⁴⁹Am Unterschied zu einem β -Spektrum wie in Abb. 6.16 sieht man hier schön die Rolle, die ein schwerer Reaktionspartner spielt: Er würde den fehlenden Impuls energetisch zum Nulltarif beisteuern.

⁵⁰Zur heutigen Erklärung s. Kap. 10.3.2.

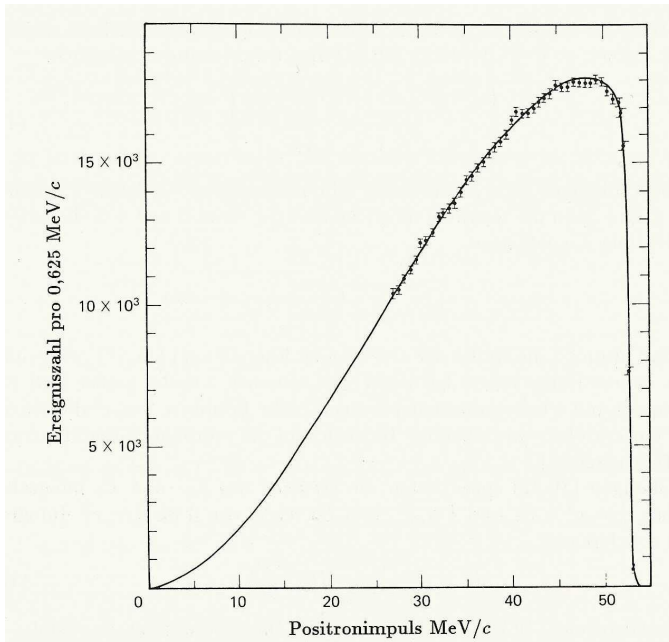


Abbildung 10.2: Impuls-Spektrum der Positronen aus dem Myonen-Zerfall (zusammen mit einer theoretischen Kurve nach der Fermi-Theorie der Schwachen Wechselwirkung (s. Kap. 6.5.7), von 1965). In dem gezeigten Energiebereich gilt für Positronen schon $E \approx pc$, die Abszisse gibt daher auch ihre Energie an. Die höchste Energie entspricht nur der Hälfte der Ruheenergie des Myons $m_\mu c^2 = 106 \text{ MeV}$. Aus [21] nach [5]

Myonen nun auf Bestellung. Solche Fragen erfordern genauere Messungen als mit den Myonen der Höhenstrahlung möglich sind. Den dazu erforderlichen Quantensprung schaffte die experimentelle Elementarteilchenphysik mit dem Bau von Hochenergie-Beschleunigern.⁵¹ Ein so genaues Energiespektrum wie das der Positronen in Abb. 10.2 aus dem Jahr 1965 hätte man aus den unscharfen Nebelkammer-Aufnahmen Ende der 1940er Jahre nicht ermitteln können. Dass man Myonen (und andere Elementarteilchen) jetzt wirklich “auf Bestellung” geliefert bekommen konnte, eröffnete den Experimentatoren neue Welten. In enger Verzahnung vieler experimenteller (und nun auch theoretischer) Arbeiten wurden in verschiedenen Teilen der Elementarteilchenphysik gleichzeitig große Fortschritte erreicht; nur für die Darstellung in einem Buch muss dies teilweise schon verwirrende Geflecht etwas in Einzelstränge zerlegt werden. Daher siehe genauer “Zerfall des Pions” in Kap. 11.1.3 für die Erklärung, wie man nun Myonen herstellen kann (für die Herstellung der dabei erforderlichen Pionen siehe Kap. 11.1.7). Daraus übernehmen wir für das folgende (wobei die genaue Bezeichnung der Neutrinos erst weiter unten motiviert wird):

$$\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu, \quad \pi^- \rightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu \quad (10.21)$$

Ein Test mit 10stelliger Genauigkeit. Experimentierkunst. Einer ähnlich genauen Messung des g -Faktors, wie sie oben beim Vergleich Elektron/Positron beschrieben wurde, steht beim Myon die kurze Lebensdauer im Wege. Wenn man innerhalb $\Delta t \sim 10 \mu\text{s}$ z.B. die Larmorfrequenz ν_L bestimmen will, ist eine größere Genauigkeit als $\Delta\nu_L \sim \pm 1/\Delta t \sim \pm 0.1 \text{ MHz}$ jedenfalls nicht mehr durch Abzählen ganzer Perioden zu erzielen. Für die Abschätzung der damit erreichbaren relativen Genauigkeit wird die Larmorfrequenz des Myons bei einem (damals) sehr starken Feld $B=10 \text{ T}$ aus der des Elektrons ($\nu_L(e) \approx 280 \text{ GHz}$) wegen 200facher Masse des Myons zu $\nu_L(\mu) \approx 1400 \text{ MHz}$ geschätzt, nur 4 Zehnerpotenzen über der typischen Ungenauigkeit der Frequenzbestimmung. Ganz konkret wäre ein Myon auch schon längst zerfallen, bevor man es in einer magnetischen Falle einfangen und auf einem tiefen Landau-Niveau stabilisiert hat. Was tun? Die Larmor-Präzession drückt sich nicht nur als Niveau-Aufspaltung aus, sondern (immer) auch ganz anschaulich als Präzessionsbewegung des Spin-vektors. Für die Emission des beim Zerfall entstehenden Elektron gibt es eine bevorzugte Richtung, und die dreht sich mit. Diese zwei Bemerkungen zusammen genommen ergeben, dass ein Detektor eine pulsierende Zählrate abgibt, wenn er die Elektronen von einer großen Anzahl polarisierter Myonen in einem Magnetfeld auffängt. Natürlich nimmt wegen des Zerfalls diese Zählrate auch exponentiell ab. Wo “bestellt” man nun *polarisierte* Myonen?

⁵¹Zu Beschleunigern und Detektoren s. einen kurzen Abriss in Kap. 11.5.

Sie kommen schon so aus der Reaktion (Gl. 10.21) heraus, in der sie erzeugt wurden⁵².

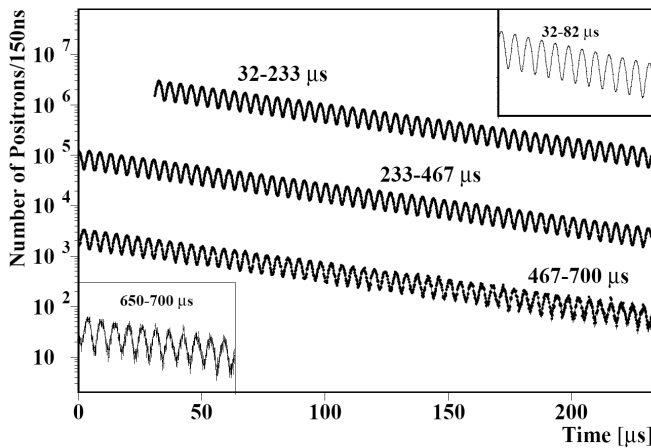


Abbildung 10.3:

Zählratenverlauf der Positronen aus dem Zerfall polarisierter Myonen im Magnetfeld (halblogarithmisch). Die gesamte Messkurve über 700 μs ist in drei Abschnitten zu je 233 μs dargestellt, die aneinandergesetzt zu denken sind. Dann sieht man insgesamt einen exponentiellen Abfall, überlagert von einer Modulation von etwa 4 μs Periode. Die Lebensdauer der Myonen wurde durch relativistische Zeitdilatation um einen Faktor ~ 30 gestreckt. Die Oszillation zeigt nicht die Larmorfrequenz der präzedierenden Spinmomente, sondern die Differenz zur Zyklotronfrequenz, mit der die Myonen im Magnetfeld Kreisbahnen beschreiben. (aus [10])

Wegen der grundsätzlichen Bedeutung der Frage, wie nah oder entfernt die Verwandtschaft von Myon und Elektron ist, wurde dies Experiment seit den 1960er Jahren mit steigendem Aufwand und steigender Genauigkeit erst im *CERN*, dann in Brookhaven(USA) wiederholt. Die experimentelle Kurve von 1999 [10] ist in Abb. 10.3 gezeigt. Nach den vorangehenden Bemerkungen zu den Schwierigkeiten muss diese Messkurve überraschen. Tatsächlich wurden zwei besondere Kunststücke der Experimentatoren auch noch gar nicht genannt:

- Die Lebensdauer der Myonen wurde künstlich verlängert, indem sie bei $E \approx 3$ GeV beobachtet wurden, das bedeutet Zeitdilatation um einen Faktor ~ 30 (der jedoch nach der Relativitätstheorie die Larmorperiode nicht verlängert!).
- Das Magnetfeld ($B=1.6$ T) verursacht nicht nur die Larmorpräzession der Myonen, sondern zwingt sie auch zu einer Kreisbewegung – in entgegengesetztem Drehsinn. Die sichtbare Modulation gibt daher die kleine Differenzfrequenz. Es handelt sich also wieder um ein ($g-2$)-Experiment, in dem die Anomalie des g -Faktors direkt gemessen wird.

Ergebnis: Der g -Faktor der positiven und negativen Myonen ist im Rahmen der Messgenauigkeit gleich und lautet, auf 10 Stellen nach dem Komma:

$$g_{\mu^\pm} = 2 \times (1 + 0.001\,165\,920\,8 (\pm 6)) .$$

Man muss schon genau auf Gl. (10.17) gucken, um einen Unterschied zum Elektron zu bemerken. Messtechnisch gesehen ist er aber hoch signifikant. Also doch zwei wesentlich verschiedene Teilchen? Die Frage, was aus den kleinen Anomalien der g -Faktoren und ihrem noch kleineren Unterschied zu schließen ist, wird bis zum abschließenden Kapitel 14.1 zum Standard-Modell aufgeschoben.

10.3.2 Verschiedene Leptonenladungen von Myon und Elektron

Die Familie teilt sich. Nie wurde der Übergang $\mu^\pm \rightarrow e^\pm + \gamma$ beobachtet, noch nicht einmal als seltenes Ergebnis von Prozessen, wie sie in höherer Ordnung der Störungstheorie vorstellbar wären (experimentelle obere Schranke für den Anteil heute: $< 10^{-11}$ [1]). Dies sprach für die Hypothese, dass es einen Unterschied zwischen den beiden Leptonen gibt, der über die Verschiedenheit des Energieinhalts, also der Ruhemasse,

⁵²Wie auch die Elektronen aus dem β -Zerfall: Ausdruck der Paritätsverletzung durch die Schwache Wechselwirkung (Kap. 12.2.5).

hinausgeht und durch keine Wechselwirkung abgebaut werden kann. Dann könnte die Notwendigkeit der Emission von *zwei* Neutrinos auch so verstanden werden, dass das Myon sich gar nicht in das Elektron (oder Positron) umwandelt (wie der Weg der elektrischen Ladung nahelegen würde), sondern in ein ihm verwandtes Neutrino ν_μ , und dass das Elektron im Paar mit dem ihm zugeordneten Anti-Neutrino erzeugt wird ($e^- + \bar{\nu}_e$, oder umgekehrt $e^+ + \nu_e$, je nach Ladung des Myons) – immer unter Erhaltung der Teilchenzahl, jetzt *getrennt* für die elektronische und myonische Familie.⁵³ Das bedeutet die Unterteilung der oben erst eingeführten einheitlichen Leptonenladung L in eine elektronische (Quantenzahl $L_e = +1$ für Elektron und Neutrino, $L_e = -1$ für Positron und Antineutrino) und eine myonische ($L_\mu = \pm 1$ analog dazu, wobei in Parallele zum Elektron das negative Myon als Teilchen eingeordnet wird, hier noch willkürlich⁵⁴). Deutung der Zerfallsgleichungen mit ihren drei erhaltenen Ladungen jetzt:

$$\begin{array}{rcll}
 & \mu^- & \rightarrow & e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu \\
 q : & -1 & = & (-1) + 0 + 0 \\
 L_e : & 0 & = & (+1) + (-1) + 0 \\
 L_\mu : & +1 & = & 0 + 0 + (+1)
 \end{array} \tag{10.22}$$

$$\begin{array}{rcll}
 & \mu^+ & \rightarrow & e^+ + \nu_e + \bar{\nu}_\mu \\
 q : & +1 & = & (+1) + 0 + 0 \\
 L_e : & 0 & = & (-1) + (+1) + 0 \\
 L_\mu : & -1 & = & 0 + 0 + (-1)
 \end{array} \tag{10.23}$$

Die Verschiedenheit der Leptonenladungen allein erklärt auch schon die Abwesenheit der direkten Umwandlung eines am Kern eingefangenen Myons gemäß $\mu^- + p \rightarrow e^- + p$ (s.o.), für die vorher eine bestimmte Zuordnung zu Teilchen und Antiteilchen verantwortlich gemacht werden musste. Das ist nur eins der vielen Beispiele dafür, dass es oft verschiedene Erklärungen geben kann, hier sogar von ähnlicher Einfachheit, und man keine davon als *bewiesen* ansehen soll, bevor nicht alle anderen ausgeschlossen sind.

experimentum crucis. Lässt sich aus dem Ansatz unterschiedlicher Leptonenladungen eine Voraussage ableiten, deren experimentelle Prüfung ihn je nach Ergebnis widerlegen könnte? So ein Beispiel ist:

“Das myonische Neutrino kann in seinen Wechselwirkungen in nichts anderes übergehen als in ein μ^- , und das myonische Antineutrino analog immer in ein μ^+ , aber insbesondere nicht in e^\pm .”

Z.B. beim myonischen Analogon zum inversen β^+ -Zerfall des Neutrons würde nur $\bar{\nu}_\mu + p \rightarrow n + \mu^+$ erlaubt sein, und $\bar{\nu}_\mu + p \rightarrow n + e^+$ verboten. Dieser Test wurde an hochenergetischen myonischen Neutrinos (\sim GeV) gemacht, die aus den Zerfällen der am Brookhaven-Zyklotron erzeugten π^- gewonnen wurden und hinter 13 Meter dicken Stahlwänden⁵⁵ – zur Abschirmung gegen alle anderen Strahlungen – auf 10 t Detektormaterial treffen sollten, das die Ionisationsspuren etwa entstehender geladener Teilchen fotografisch aufzeichnen konnte. Nach acht Monaten hatten sich aus den statistischen Schwankungen des dennoch unvermeidlichen Untergrunds ganze 29 Signale herausgeschält, die als die Spuren eines einzelnen, mitten im Detektor neu erzeugten μ^+ von entsprechend hoher Energie interpretiert werden mussten, gegenüber Null Signalen für solche Elektron-Positron-Schauer, die die Entstehung eines hochenergetischen Positrons angezeigt hätten. Seitenlang wird in der Veröffentlichung von 1962 [12] analysiert, ob die Spuren nicht doch von anderen Ereignissen herrühren könnten. Für diesen Existenzbeweis der zweiten Neutrinosorte⁵⁶, bekamen Leon M. Lederman, Melvin Schwartz und Jack Steinberger den Nobelpreis 1988. Seither muss man die

⁵³Damit erklärt sich die Schreibweise der Neutrinos, wie sie oben in Gl. (10.21) und auch schon in Kap. 6.5 benutzt wurde.

⁵⁴Aus einem tieferen Grund ist diese Zuordnung wichtig für die Konsistenz des Standard-Modells, s. Kap. 14.4.

⁵⁵aus einem abgewrackten Schlachtschiff der USA, denn neuer Stahl wäre aufgrund der massiven Atomwaffenversuche mit radioaktivem Kobalt verunreinigt und würde durch seine eigene Strahlung in allen Detektoren den Untergrund erhöhen.

⁵⁶und für den “Eintritt ins Zeitalter der Experimente mit Neutrinostrahlen”. Warum es dem Nobelpreis-Komitee und vor allem seinen Beratern entgangen war, dass mit der experimentellen Entdeckung der ersten Neutrinosorte durch Cowan und Reines dies Zeitalter schon fast 10 Jahre früher begonnen hatte, wird man erst nach Öffnung der Archive ersehen können. Immerhin wurde dies Versäumnis erkannt und 1995 durch die Preisverleihung an den noch lebenden der beiden Entdecker geheilt (vgl. Kap. 6.5.11), zusammen mit dem Preis für die Entdeckung der dritten Leptonen-Familie.

Leptonenladung für die myonische und die elektronische Familie getrennt bilanzieren. Erst die Entdeckung der schwachen *Neutrino-Oszillationen* zwang ab 1995 hier noch einmal zu einer neuen Betrachtungsweise (s. Kap. 10.4.4).

10.3.3 Die dritte Leptonen-Familie

Neuer Erhaltungssatz gleich wieder verletzt? Die getrennte Erhaltung der Leptonenzahl für jeweils Myonen und Elektronen verbietet Reaktionen wie $e^+ + e^- \rightarrow e^+ + \mu^-$ (oder $\rightarrow e^- + \mu^+$). Dass sie 1975 trotzdem überraschend beobachtet wurden, führte aber nicht zur Revision dieses Erhaltungssatzes, sondern zur Entdeckung einer dritten Familie von Leptonen, genannt *Tauonen* τ^\pm (griechisch “das dritte”). Die beobachteten $e^\pm\mu^\mp$ -Paare hatten nämlich zu wenig Energie (alle anderen Erhaltungssätze waren erfüllt), folglich musste etwas mehr entstanden und unbemerkt durch die riesigen Detektoren hindurch geflogen sein, also fast sicher Neutrinos⁵⁷. Die vervollständigte Reaktion wäre dann z.B. $e^+ + e^- \rightarrow e^+ + \nu_e + \mu^- + \bar{\nu}_\mu$. Aber wie entsteht daraus das Argument für ein neues Teilchen? Antwort: Die Häufigkeit dieser Reaktion, also ihr Wirkungsquerschnitt (obwohl nur einige 10 Picobarn), ist viel zu groß für die direkte Erzeugung der Neutrinos durch die Schwache Wechselwirkung, wie man 1975 schon sicher wusste, und sie zeigt eine Energieschwelle bei ca 4 GeV. Die Abbildung aus der Original-Veröffentlichung [35] ist tatsächlich ein untrüglicher Beleg, obwohl sie nur auf 86 Einzelbeobachtungen beruht und entsprechend große Fehlerbalken für die rein statistische Unsicherheit zeigt. Doch diese 86 Ereignisse bilden, bei einem geschätzten Untergrund von 22 zufälligen, ähnlich aussehenden aus anderen Ursachen, ein hochsignifikantes Ergebnis: Bei 4 GeV haben sich neue Teilchen gebildet, und zwar nicht durch Schwache Wechselwirkung.

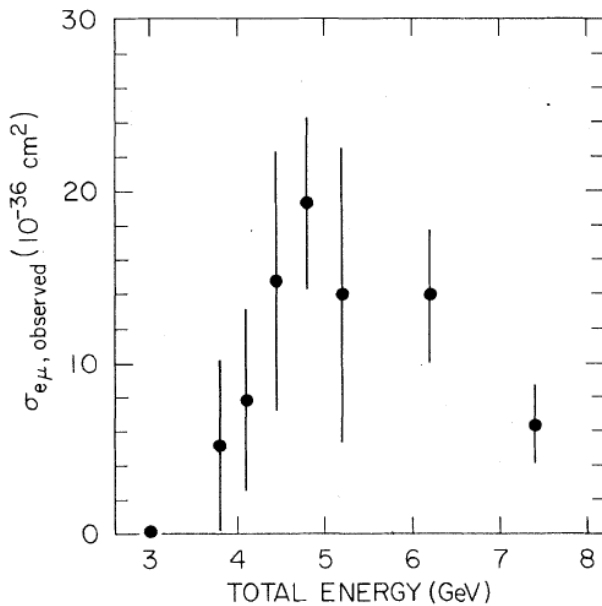


Abbildung 10.4: Der gültige erste Nachweis einer dritten Familie von Leptonen. Aufgetragen ist die Häufigkeit von 86 Elektron-Myon-Paaren, die sich nach Zusammenstößen von Elektronen und Positronen gebildet haben, über der Energie. Der Wirkungsquerschnitt hat die Einheit Picobarn ($1 \text{ pb} = 10^{-12} \text{ b} = (10^{-5} \text{ fm})^2$). Typische Kernreaktionen sind um viele Größenordnungen häufiger (z.B. 10^9 fach, s. Abb. 11.7), Reaktionen der Schwachen Wechselwirkungen um eben so viel seltener. (Aus [35])

Wieder ein unerwünschtes Lepton. Aber handelte es sich bei dem neuen Teilchen um ein Lepton, also um den ersten Vertreter einer dritten Familie von Leptonen? Gegen diese Interpretation gab es jahrelangen Widerstand [34] – aus Gründen, die erst mit dem Quark-Modell der stark wechselwirkenden Teilchen verständlich werden: Es sollte nicht mehr Leptonen als Quarks geben, und diese *Quark-Lepton-Symmetrie* war vor diesem neuen Teilchen durch die (als große Überraschung gefeierte) kürzliche Entdeckung des vierten Quark gerade erfüllt worden. Viele weitere Untersuchungen (z.B. zur Energie- und Winkelverteilung der entstandenen Elektronen und Myonen, und zur Beobachtungen zur Häufigkeit anderer Zerfallsprodukte wie z.B. Pionen und andere Hadronen) sicherten dann aber diese leptoniche Interpretation. Das neue Teilchen verhält sich ganz wie ein Lepton, denn es stimmt abgesehen von der Masse völlig mit Elektron

⁵⁷Es müssen zwei (oder jedenfalls eine gerade Anzahl) sein, um mit den halbzahligen Spins nicht in Widerspruch zu geraten.

und Myon überein. Die Reaktionsgleichung, die zur seiner Entdeckung anhand der $e\mu$ -Paare geführt hatte, konnte damit um weitere zwei Neutrinos ergänzt werden und lautet nun vollständig:

$$\begin{aligned}
 e^+ + e^- &\rightarrow \tau^+ + \tau^- \\
 \tau^+ &\rightarrow \bar{\nu}_\tau + e^+ + \nu_e \quad \text{oder} \quad \rightarrow \bar{\nu}_\tau + \mu^+ + \nu_\mu \\
 \tau^- &\rightarrow \nu_\tau + \mu^- + \bar{\nu}_\mu \quad \text{oder} \quad \rightarrow \nu_\tau + e^- + \bar{\nu}_e .
 \end{aligned}
 \tag{10.24}$$

Darin ist die Erzeugung des $\tau^+\tau^-$ -Paares ein Prozess, der nicht nur durch die Schwache Wechselwirkung, sondern durch die viel stärkere elektromagnetische Zustände kommen kann, im Einklang mit der Häufigkeit der Reaktion. Das wird weiter unten näher beleuchtet, denn es bietet die Möglichkeit, die Quanten-Elektrodynamik einem scharfen Test zu unterwerfen. Die Entstehung der Neutrinos im weiteren Verlauf verweist hingegen eindeutig auf die Schwache Wechselwirkung, die gerade wegen ihrer Schwäche erst zum Tragen kommen kann, wenn die anderen Möglichkeiten ausfallen, hier ganz einfach durch die räumliche Trennung der beiden Tauonen.⁵⁸ Die Energieschwelle für diese Reaktion ist folglich durch ihre doppelte Ruhemasse gegeben. Sie wurde genau hierdurch später auf $m_{\text{tau}}c^2 = 1776.84 \pm 0.17$ MeV bestimmt [1]. Die Suche nach direkten Anzeichen der Tau-Neutrinos hatte erst 1990 Erfolg. Der dazu erforderliche Aufwand kann vielleicht durch einen entsprechenden Bandwurmsatz deutlich werden: Es konnten anhand von neu entstandenen $e\mu$ -Paaren die Zerfälle von solchen τ^\pm nachgewiesen werden, die sich in Stößen wie $\nu_\tau + n \rightarrow \tau^- + p$ (oder $\bar{\nu}_\tau + p \rightarrow \tau^+ + n$) gebildet haben mussten, ausgelöst durch Tau-Neutrinos ν_τ oder $\bar{\nu}_\tau$, die ihrerseits nicht anders als durch den Zerfall anderer τ^\pm hergestellt worden sein konnten, welche wiederum in Stößen wie Gl. (10.24) erzeugt worden waren. An der dritten Leptonen-Familie war kein Zweifel mehr möglich. Martin Perl, der ursprüngliche Entdecker des τ^\pm , erhielt 1995 den Nobelpreis.

Virtuelles Photon ohne Impuls aber mit ± 20 GeV? Warum bei diesen Energien überhaupt nach neuen Teilchen gesucht wurde, ist Teil der Geschichte des "Teilchen-Zoos der Hadronen", die im nächsten Kapitel 11 aufgerollt wird. Die Experimente, die dann zur Entdeckung des τ führten, sollten aber gleichzeitig auch die Quanten-Elektrodynamik auf eine harte Probe stellen. Sie beruhen auf dem Grundgedanken, dass bei einem genügend großen Angebot von Energie sich jedes Paar von Teilchen und Antiteilchen bilden könnte. Damit die Erhaltungssätze für elektrische oder sonstige Ladungen diese Reaktionen nicht unnötig komplizieren, schießt man dazu in großen Beschleuniger-Anlagen zwei Strahlen aus Teilchen und Antiteilchen gegeneinander⁵⁹. Sind die Projektile elektrisch geladene Teilchen ohne starke Wechselwirkung (im wirklichen Experiment also Elektronen und Positronen), dann entsteht bei der Vernichtung ein virtuelles Photon⁶⁰, wie in den Feynman-Diagrammen der *QED* in Abb. 10.5 dargestellt. Es hat dann – in den Gleichungen der *QED*! – im Schwerpunktsystem den Impuls Null, aber die ganze Energie (je nach Richtung im Diagramm positiv oder negativ) und kann (nein: muss) sie seinerseits an ein beliebiges anderes Paar aus Teilchen und Antiteilchen weitergeben (d.h. sie entstehen lassen), sofern sie nur elektrisch geladen sind (denn für ungeladene gibt es keinen Vertex mit dem Photon). In niedrigster Ordnung ergibt die *QED* daher kompromisslos für alle Teilchen dieselbe schlichte Formel ohne jeden freien Parameter:

$$\sigma = \frac{4\pi\alpha^2}{3E^2}(\hbar c)^2 .
 \tag{10.25}$$

Die Gl. (10.25) verdient wegen ihrer Einfachheit ein näheres Hinsehen: Als einzige physikalische *Variable* des konkreten Systems tritt E auf, die Energie im Schwerpunktsystem. Die (Ruhe-)Massen können nicht darin vorkommen, weil sie die Wechselwirkung nicht beeinflussen und im vorliegenden hoch relativistischen Fall auch für die Kinematik irrelevant sind, weil der Faktor Zustandsdichte für die

⁵⁸Zum Entstehen der hier angedeuteten, viel gebrauchten Argumentation anhand der sehr unterschiedlichen Stärken der Wechselwirkungen mehr in Kap. 11.3.

⁵⁹Collider-Prinzip: Das Laborsystem ist näherungsweise auch das Schwerpunktsystem, mithin der Gesamtimpuls ungefähr Null. Für die Bildung neuer Teilchen steht dann die gesamte kinetische und Ruhe-Energie $2(E_{\text{kin}} + mc^2)$ beider Projektile zur Verfügung. Im *SppS*-Beschleuniger des *CERN* werden Protonen und Antiprotonen aufeinander geschossen, s. Kap. 12.5.4.

⁶⁰sofern die Energie nicht zu nahe an der Ruheenergie des neutralen Austauschteilchen der Schwachen Wechselwirkung ist, s. Kap. 12.5.4 und Abb. 14.7.

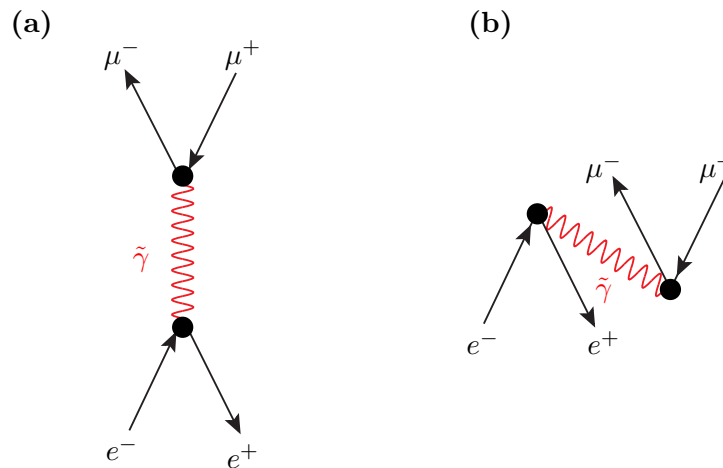


Abbildung 10.5: Feynman-Diagramme für Umwandlung eines ankommenden Elektron-Positron-Paars in ein auslaufendes Myon-Antimyon-Paar vermittelt durch die elektromagnetische Wechselwirkung. **(a)** Durch Annihilation des e^+e^- -Paars im ersten Vertex entsteht ein (einziges!) **virtuelles Photon**, das danach am zweiten Vertex an ein $\mu^+\mu^-$ -Paar “ankoppelt”, mit anderen Worten: es entstehen lässt. Im Schwerpunktsystem betrachtet (bei Experimenten am e^+e^- -Collider ist das das Laborsystem) überträgt das Photon den Impuls Null, aber die gesamte Energie. Das Diagramm **(b)** ist nach den Feynman-Regeln schon in **(a)** mit enthalten. Es ist hier extra angeführt um zu erinnern, dass in die Berechnungen auch Prozesse einbezogen werden müssen, die mit Worten ganz anders zu beschreiben wären: Spontane Entstehung eines (reellen) $\mu^+\mu^-$ -Paars zusammen mit einem (**virtuellen**) **Photon**, welches danach erst zusammen mit dem ankommenden (reellen) e^+e^- -Paar komplett verschwindet. Dies virtuelle Photon überträgt also wieder keinen Impuls, diesmal aber die *negative* Gesamtenergie.

Goldene Regel immer nach derselben Gleichung $E = pc$ behandelt werden darf. Spin und magnetisches Moment kommen nicht vor, denn sie sind in der Ankopplung des elektromagnetischen Felds an die Punktladung e des Dirac-Spinors schon voll berücksichtigt. Die Kopplungskonstante zwischen Ladung und Photon, $\alpha = e^2/(4\pi\epsilon_0)$, dimensionslos und für alle mit einer Elementarladung geladenen Teilchen gleich, steht im Quadrat, weil das (für das Quadrat des Matrixelements) in der störungstheoretischen Übergangsamplitude mit zwei Vertices immer so ist. Weitere Parameter gibt es nicht in der elektromagnetischen Wechselwirkung, alles übrige sind universelle Konstanten. Die Proportionalität $\sigma \propto E^{-2}$ findet dann ihre ebenso einfache Erklärung darin, dass es aus Gründen der physikalischen Dimensionen nur einen Weg gibt, allein aus einer Energie E eine Fläche zu berechnen: indem man die Konstante $(\hbar c)^2 = (200 \text{ MeV fm})^2$ durch E^2 teilt.⁶¹

Im tieferen Sinn ist es damit die Skalen-Invarianz der elektromagnetischen Wechselwirkung (also das $1/r^2$ -Gesetz der Coulomb-Kraft), auf die dieses einfache und für die Reaktionen mit verschiedensten Teilchen gültige Verhalten zurückgeht. Alles zusammen eine starke Voraussage, und durch die grauen Datenpunkte in Abb. 10.6 glänzend bestätigt.

Ein guter physikalischer Punkt. Die Übereinstimmung dieser Vorhersage mit den Messergebnissen in Abb. 10.6 ist frappierend. Das ganze Konzept der *QED* wird bestätigt und ihr enormer Gültigkeitsbereich demonstriert. Ihre Genauigkeitsgrenze drückt man gerne durch eine Längenskala aus, als Maß für die Annäherung, ab der doch noch messbare Abweichungen auftreten könnten. Nimmt man – fiktiv – ein exponentiell abgeschwächtes Zusatzpotential an, kann man aus diesen Messergebnissen (und denen für die Winkelverteilung, die noch empfindlicher reagieren würde) für den Reichweiteparameter eine Obergrenze

⁶¹Elementarteilchenphysikern springen Ähnlichkeiten zur Rutherford-Formel ins Auge (genauer: zu ihrem Vorfaktor ρ_0^2 in Gl. (3.3), denn um die Winkelverteilung geht es hier ja nicht): $\sigma \propto E^{-2}$; $\sigma \propto e^4$.

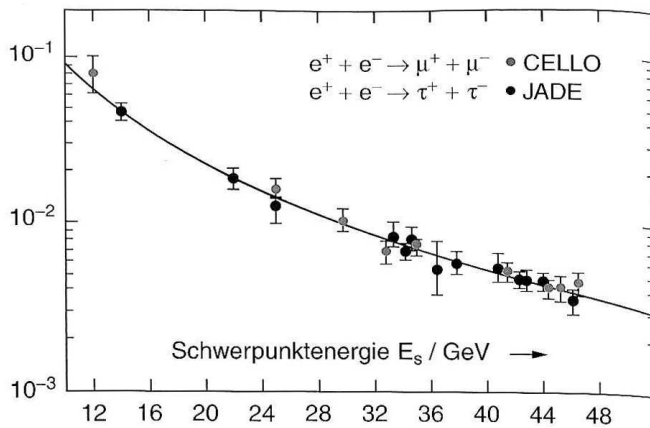


Abbildung 10.6: Erzeugung der schweren Leptonen μ und τ in Teilchen-Antiteilchen-Paaren durch Elektron-Positron-Vernichtung bei Energien weit oberhalb ihrer Ruhemasse [6], [7]. Der Wirkungsquerschnitt ist in nb aufgetragen. Er ist für beide Teilchensorten gleich und bestätigt auch quantitativ hervorragend die parameterfreie Vorhersage der *QED* (durchgezogene Linie nach Gl. 10.25).

von 10^{-18} m entnehmen, etwa ein tausendstel des Nukleonenradius oder des klassischen Elektronenradius.

Das ist dann auch derzeit die experimentelle Obergrenze für eine eventuelle Ausdehnung der (geladenen) Leptonen. Ob Elektronen deshalb wirklich Punkte sind, kann man nun leider immer noch nicht wissen, aber größer als der milliardste Teil eines milliardstel Meters können sie jedenfalls nicht sein. Dies Ergebnis, das schon 1987 erzielt wurde, ist wohl nicht dringend verbesserungsbedürftig.

Noch ein guter physikalischer Punkt. Auch in anderer Hinsicht ergibt sich der Eindruck, dass die Erforschung der Leptonen ihr Ziel erreicht haben könnte. Sollte es weitere Familien von Leptonen geben, wäre die Ähnlichkeit mit den drei bekannten nicht sehr groß. Diese Einschätzung ist damit begründet, dass der Lebensdauer des Z^0 -Teilchens, das mit allen bisher bekannten Teilchen Wechselwirkung machen kann, mit Hilfe des Standard-Modells zu entnehmen ist, dass es unter den möglichen Endzuständen des Zerfalls nur drei Sorten Neutrinos geben kann (sonst wäre sie kürzer). Das Z^0 hat eine Ruhemasse von ca. 90 GeV. Ein $\nu\bar{\nu}$ -Paar einer eventuellen vierten Neutrinosorte müsste mindestens so schwer sein. Das wäre aber reine Spekulation, denn die drei Massen der bekannten Neutrinos, selbst wenn sie nicht Null sind, haben sich ihrer Kleinheit wegen bisher jeder Messung entzogen. Allerdings ist Vorsicht angebracht: Gerade hier gibt es noch erheblichen Klärungsbedarf.

10.4 Neutrinos

Was für Teilchen sind Neutrinos? Um was für eine seltsame Sorte Materie oder Strahlung handelt es sich hier? Zwei Jahrzehnte lang durften sie in der Physik nur den Lückenbüßer für Fehlbeträge in den Bilanzen von Energie, Impuls und Drehimpuls geben. Dafür, dass dieser 1930 entstandene Gedanke von Pauli überhaupt stimmig sein konnte, war eine extreme Schwäche ihrer Wechselwirkung mit normaler Materie geradezu die Vorbedingung. Doch seit man ab den 1950er Jahren immer besser gelernt hat, die von Neutrinos ausgelösten Reaktionen gezielt aus dem "Lärm" der anderen herauszufiltern, sind sie allmählich zu einer der interessantesten Arten der Materie geworden. Eine Hauptrolle spielen sie sogar in so wichtigen und mächtigen Prozessen wie dem, in dem die Kerne der chemischen Elemente unserer gewohnten Materie in explodierenden Sternen erzeugt werden (s. Kap. 8.5.3). Möglicherweise tragen sie auch zu der *Dunklen Materie* bei, deren Existenz man bisher nur durch ihre Gravitationswirkung auf astronomischen Längenskalen indirekt erschlossen hat, von der es demnach aber ein vielfaches mehr geben muss als von aller sichtbaren Materie zusammen.

10.4.1 Neutrino-Reaktionen

Um mit Neutrinos experimentieren zu können, muss man sie an charakteristischen Prozessen erkennen. Im ersten gelungenen Nachweis ihrer Existenz war das der inverse β -Zerfall des Neutrons

$$\bar{\nu}_e + p \rightarrow n + e^+ \quad (10.26)$$

der sich unter Nutzung der umgebenden Materie durch schnell erfolgende Vernichtungsstrahlung des Positrons mit einem Elektron und leicht verzögerte Einfangsstrahlung des Neutrons an einem Kern nachweisen ließ (ausführlich in Kap. 6.5.11). Zu selben Zeit wurde dieser Prozess auch mit umgekehrten Ladungen probiert:



Um ihn mit der nötigen Empfindlichkeit nachweisen zu können, machte man sich quasi die (damals unerreicht hohe) Empfindlichkeit der radioaktiven Markierung zunutze, ließ das Neutrino dabei also ein Radionuklid erzeugen, um dessen Strahlung nachzuweisen. Eine solche Reaktionskette ist:



Das Argon-Isotop zerfällt durch Elektronen-Einfang mit 35 Tagen Halbwertszeit zurück in Chlor. (Die Energie für diesen ganzen Kreisprozess muss das Neutrino mitbringen: mindestens 814 keV.) Da das neu entstandene Neutrino mit großer Sicherheit spurlos davon fliegt, wird der Elektronen-Einfang durch den Argon-Kern nur dadurch bemerkbar, dass die Hülle nun ein Loch in der K-Schale hat. Es entsteht also keine Radioaktivität im engeren Sinne, doch repräsentiert das Loch einen Energieinhalt von 2.8 keV, der sich durch die für Chlor charakteristische Röntgenstrahlung oder Emission eines oder mehrerer äußerer Elektrons abbaut (Auger-Effekt, häufiger als Röntgenstrahlung). Nicht eben viel Energie, daher muss man aus dem notwendigerweise großen Tank mit einer chlorhaltigen Flüssigkeit die wenigen Argon-Atome, die sich innerhalb der sinnvollen Zeit von einigen Halbwertszeiten des ${}^{37}_{17}\text{Ar}$ gebildet haben, erst herausholen um sie zu zählen. Das ist nicht ganz aussichtslos, denn als Edelgas lässt Argon sich mit einem Trägergas herauspülen – jedenfalls wenn man ihm Spuren von stabilem Argon beigemischt hat⁶². Auf diese Weise probierte R. Davis 1955 den Neutrino-Nachweis an einem Reaktor, zeitgleich etwa mit dem Team Cowan/Reines (s. Kap. 6.5.11), aber im Gegensatz dazu natürlich ergebnislos [13].

Frage 10.12 *War der Misserfolg nicht vorherzusehen?*

Antwort 10.12 *Nur wenn man 1955 schon sicher gewusst hätte, dass ν_e und $\bar{\nu}_e$ wirklich verschiedene Teilchen sind.*

Davis ließ sich von dem Fehlschlag nicht entmutigen, der übrigens erheblich dazu beitrug, dass die Unterschiedlichkeit von ν_e und $\bar{\nu}_e$ allgemein anerkannt wurde. 10 Jahre später wies er mit einem größeren Tank, zur Abschirmung tief im Bergwerk *Homestake* (USA) aufgestellt, wirklich Neutrinos ν_e nach: nämlich die, die bei den Fusionsprozessen in der Sonne entstehen (s.u.). Für die Methode und die damit im Laufe von Jahrzehnten gemachten Entdeckungen erhielt er 2002 den Nobelpreis.

Kamiokande. Nach einem ganz anderen Prinzip arbeiten Neutrino-Detektoren, die in den 1980er Jahren ursprünglich für die Beobachtung eines Zerfalls des Protons gebaut wurden, wie er im Rahmen der Suche nach *dem* großen vereinheitlichten Theoriegebäude der Physik damals in die Diskussion gebracht wurde. Der größte ist *Kamiokande* in Japan⁶³. Der Detektor enthält nichts als 50 m³ (??) reinstes Wasser, umgeben von anfangs tausend, heute über 11 000 besonders großen Photomultipliern⁶⁴, um etwaiges Szintillationslicht nachzuweisen. Energiereiche Neutrinos machen sich darin bemerkbar, falls sie sich durch Wechselwirkung mit (hauptsächlich) einem Nukleon in ein geladenes Lepton umgewandelt haben (s. Gl. 10.26 und 10.27 oben), und wenn dieses sich mit über 75% der Vakuum-Lichtgeschwindigkeit durchs Wasser bewegt. Es erzeugt dann Cherenkov-Strahlung (s. Kap. 11.5.2). Daneben kann genau so die einfache Streuung eines Neutrinos an einem Elektron nachgewiesen werden, wenn es dadurch einen Rückstoß oberhalb einiger MeV erleidet. Auch myonische Neutrinos werden so nachgewiesen.

Frage 10.13 *Doch nicht durch dieselben Reaktionen?*

⁶²Man nimmt als Trägergas Helium, aus dem man die geringe Menge vorher zugesetzten stabilen Argons, nach dem Durchspülen des Tanks nun vermehrt um (zahlenmäßig) eine Handvoll ${}^{37}_{18}\text{Ar}$ -Atome, durch Ausfrieren wieder abtrennen und damit räumlich konzentrieren kann.

⁶³Der Name erinnert an das frühere Ziel: An den Ortsnamen *Kamioka* wurde *-nde* für *nucleon decay experiment* angehängt.

⁶⁴Eindrucksvolle Bilder s. z.B. unter http://hepwww.rl.ac.uk/public/groups/t2k/super_kamiokande.html

Antwort 10.13 *Nein. Streuung an einem Elektron ist hier auch möglich, aber Umwandlung in ein Elektron nicht. Es heißt hier $\nu_\mu + n \rightarrow p + \mu^-$ bzw. $\bar{\nu}_\mu + n \rightarrow p + \mu^+$, um die sortenspezifischen Erhaltung der Leptonenladung zu erfüllen. Allein dazu ist natürlich mindestens $m_\mu c^2 \approx 106 \text{ MeV}$ aufzubringen.*

Außer dem ungeheuren Vorteil eines sofortigen Nachweises der Neutrinos kann aus Öffnungswinkel und Achse des Lichtkegels bestimmt werden, welchen Impuls das (entstandene oder nur gestoßene) geladene Lepton (nach Richtung und Betrag) hat. Bei diesen Stößen hoher Energie stimmt er gut mit dem Impuls des Neutrinos überein. Erst damit konnte z.B. gezeigt werden, dass die von Davis gezählten Neutrinos wirklich aus Richtung der Sonne kommen. Auch lässt sich an der Form des Cherenkov-Kegels mit einiger Sicherheit ablesen, ob das schnell fliegende Teilchen im Vergleich zu den meisten seiner Stoßpartner (Elektronen) erheblich schwerer (Myon) oder gleich schwer ist: Das schwerere Teilchen fliegt besser geradeaus (vgl. Stoß-Kinematik, Kap. 2.2), das Elektron erzeugt schnell einen ganzen Schauer von sekundären Elektronen und Positronen.

10.4.2 Neutrinos von der Sonne und der Supernova

Der Zufall bescherte am 23.02.1987 den rund um die Uhr laufenden Neutrino-Detektoren eine sensationelle Entdeckung: einen wahren "Neutrino-Schauer" von einer Supernova-Explosion (s. Abb. 10.7). Etwa zur selben Zeit (± 3 Stunden) leuchtete sie auch im sichtbaren Licht auf, was bei gleichzeitigem Start eine Übereinstimmung der beiden Laufzeiten von 2×10^{-9} bedeutet [27] – einer schärfsten Tests der Annahme gleicher Geschwindigkeiten masseloser Teilchen im Vakuum bislang. Umgekehrt kann man aus der Energie-Impuls-Beziehung dann schließen, dass die Masse der Neutrinos kaum über 11 eV liegen kann (nach [3, S. 660]).

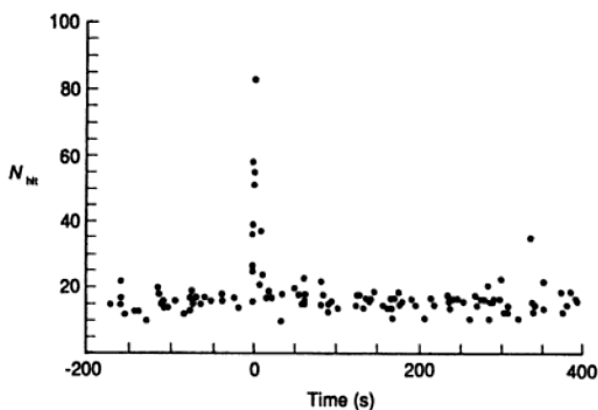


Abbildung 10.7: Neutrino-Beobachtungen im Kamiokande-Detektor am 23.02.1987. Jeder Punkt markiert ein Ereignis, als Ordinate aufgetragen ist die Zahl der gleichzeitig auf die Cherenkov-Strahlung ansprechenden Photomultiplier rings um das Wasserbassin, ein grobes Maß für die Energie. Allein 9 Neutrinos kamen innerhalb 2 s. Ihre Quelle war eine 160 000 Lichtjahre entfernte Supernova in der Kleinen Magellanischen Wolke. [40]

Von den Neutrinos aus den Fusions-Prozessen in der Sonne hat nur ein sehr kleiner Teil genügend Energie für diese Art von kinematischem Nachweis, denn der Großteil stammt direkt aus dem pp -Zyklus und hat damit höchstens 420 keV (s. Kap. 8.4.1). Die radiochemische Chlor-Argon-Methode ist mit einer unteren Schwelle von 814 keV schon günstiger als der Cherenkov-Detektor, aber auch nur für wenige % der Neutrinos empfindlich. Der Strahlungsfluss ist allerdings so hoch, dass Davis doch ein Signal erhielt.

Frage 10.14 *Wie kann man die Größenordnung des Neutrino-Flusses im Verhältnis zum Sonnenlicht abschätzen?*

Antwort 10.14 *Bei der Fusion $4p \rightarrow \alpha$ werden 27 MeV und zwei Neutrinos frei, die je etwa 1% der Energie wegtragen. Energetisch bringen uns die Neutrinos also etwa 2% der übrigen Sonnenstrahlung, die nach ihrer Thermalisierung als UV, Licht und Infrarot (mit dem spektralen Maximum bei etwa 1 eV) ankommt. Als Größenordnung kann man folglich 27×10^6 emittierte Photonen (wenn sie alle*

1 eV hätten) pro 2 Neutrinos annehmen. Die Energie-Flussdichte der Sonnenstrahlung an der oberen Atmosphäre beträgt 1.3 kW/m^2 , was umgerechnet schließlich für die Flussdichte der Neutrinos etwa $6 \times 10^{10} \text{ cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$ ergibt.⁶⁵

Hier beginnt das Rätsel der fehlenden Sonnen-Neutrinos, das von Davis 1968 aufgedeckt wurde und drei Jahrzehnte lang Grund für Aufregung in der Physik bildete: Die Messungen, an vielen Orten wiederholt auch mit empfindlicheren Methoden, ergaben ein beständiges Defizit von ca. 45-67% im Vergleich zu den besten Modellrechnungen. Alle kernphysikalischen Faktoren, auch das astrophysikalische Standard-Modell für die Vorgänge in der Sonne wurde aufgrund dieser Diskrepanz angezweifelt, intensiv geprüft und in Details verbessert. Abgesehen von dem Problem für eine Wissenschaft, die für ihre quantitativen Aussage zu den Naturvorgängen bekannt ist, konnten die fehlenden Sonnen-Neutrinos auch sonst alarmierend wirken: Sie stammen direkt aus dem Fusionsbereich der Sonne und erreichen den Detektor in ca. 8 Minuten, während die Energie für die Wärmestrahlung, von der wir jetzt leben, diesen Bereich vor größenordnungsmäßig 10^3 Jahren verlassen hat. Sollte das Messergebnis etwa heißen, dass die Sonne im Zentrum schon am Erlöschen ist? Jedenfalls schrieb Davis [14] schon nach der ersten Probemessung an den Astrophysiker William Fowler⁶⁶: "Willy, schalte die Sonne an!" Zur Erklärung wurde früh die gewagte theoretische Hypothese einer Umwandlung der elektronischen Neutrinos in eine andere Sorte (*Neutrino-Oszillation*) aufgebracht [20], aber als so exotisch empfunden, dass es (jenseits der Forderung nach verbesserten Messungen und Modellen) an weiteren ebenbürtig erscheinenden Vorschlägen nicht mangelte⁶⁷. 1998 wurde sie bestätigt – s. Kap. 10.4.4.

10.4.3 Dirac-Teilchen oder doch nicht?

Im Bild, das die Physik von der materiellen Welt entwickelt, wäre wichtig zu wissen, ob man die Neutrinos nicht doch in eine eigene, neu zu definierende Teilchengattung einordnen muss. So etwas soll man dem Prinzip der wissenschaftlichen Sparsamkeit folgend⁶⁸ zwar nicht ohne guten Grund tun, aber über mögliche Gründe wird seit den 1970er Jahren im Zusammenhang mit der oben kurz erwähnten Suche nach einem großen vereinheitlichten Theoriegebäude spekuliert. Es geht dabei insbesondere darum, dass auch die Leptonenzahl vielleicht doch nicht immer erhalten ist, wofür die strikte Unterscheidung von Teilchen und Antiteilchen etwas aufgeweicht werden müsste. Einen Namen für die geeignete Gattung gibt es schon: Statt Dirac-Teilchen würde man sie dann Majorana-Teilchen nennen, nach dem Autor der in Kap. 10.2.3 kurz erwähnten theoretischen Alternative zur Dirac-Theorie. Darin sind die Fermionen mit ihren Antiteilchen identisch.⁶⁹

Frage 10.15 *Bei den Bosonen ist das Photon ein Teilchen, das mit seinem Antiteilchen identisch ist. Es kann einzeln erzeugt oder vernichtet werden. Würde das auch für solche Majorana-Teilchen gelten?*

Antwort 10.15 *Nein. Auch wenn sie elektrisch ungeladen sind, würde die Drehimpulserhaltung das verbieten: Das Entstehen eines einzelnen Spins $\frac{1}{2}$ kann durch keine Änderung des Bahndrehimpulses der anderen Teilchen ausgeglichen werden.*

Tatsächlich lassen die Experimente (bis heute!) die Frage offen, ob Neutrino und Antineutrino wirklich verschiedene Teilchen sind und ob sie sich nur miteinander vernichten können, zwei Neutrinos (oder zwei Antineutrinos) aber nicht. Bei den extrem kleinen Wirkungsquerschnitten aller Neutrino-Reaktionen ist eine direkte experimentelle Überprüfung natürlich ausgeschlossen⁷⁰. Warum die beobachtete Einteilung in erlaubte und verbotene Reaktionen, die sich so einfach in Worten der Leptonenzahl-Erhaltung wiedergeben ließ wie in diesem ganzen Kapitel bisher ausgiebig praktiziert, doch keinen Beweis für diese

⁶⁵ "Jede Sekunde 60 Milliarden durch den Daumennagel". Die Zahl mag hoch erscheinen, entspräche bei Photonen sichtbaren Lichts aber nur einer schwach wahrnehmbaren Beleuchtung.

⁶⁶ Nobelpreisträger für die Erklärung der Entstehung der chemischen Elemente in den Sternen, s. Kap. 8.5.3.

⁶⁷ Z.B. Schwarzes Loch im Sonnenzentrum, Neutrino zerfällt in ein Boson, ... (nach [4])

⁶⁸ auch als *Occams Rasiermesser* bekannt

⁶⁹ Für eine genauere Darstellung ziehe man ein einschlägiges Lehrbuch zu Rate, z.B. [8], [37].

⁷⁰ Dieselben kleinen Wirkungsquerschnitte verhindern auch schon, einen Neutrinostrahl im Beschleuniger herzustellen und fokussiert auf ein Target zu richten.

Quantenzahl abgeben, ist einfach zu sagen: Schon die Drehimpulserhaltung würde dieselben Reaktionen verbieten wie die Leptonenzahl-Erhaltung, jedenfalls für Neutrinos mit Masse Null. Das folgt aus der Eigenschaft der Schwachen Wechselwirkung, bei den geladenen Leptonen nur die chiral-linkshändigen Teilchen und rechtshändigen Antiteilchen zu sehen, und selber die Chiralität nicht zu verletzen⁷¹. Dann muss ein Neutrino, das in ein Elektron umgewandelt wird, auch chiral links sein (und umgekehrt fürs Positron). Die Chiralität eines Neutrinos, die im Zeitpunkt seines Entstehens (durch einen Prozess der Schwachen Wechselwirkung!) festgelegt wird, ist aber eine absolute Invariante seiner weiteren Bewegung, nämlich gleich der Helizität – sofern es sich mit Lichtgeschwindigkeit bewegt, also die Masse Null hat (vgl. Kap. 10.2.7). Unter dieser Voraussetzung kann man zwischen Dirac- und Majorana-Neutrinos also nur auf dem Papier unterscheiden. Nach der genannten wissenschaftlichen Grundregel würde man dann auf die Majorana-Theorie verzichten und die Neutrinos endgültig den Dirac-Teilchen zuschlagen. Aber allein um zu wissen, *ob* es sich um eine experimentell prüfbare Frage handelt, muss man herausfinden, ob die Neutrinos die Masse Null haben.

10.4.4 Neutrino-Oszillation

Eine Bestimmung der Neutrino-Masse aus der Form des β -Spektrums (Kap. 6.5.6) oder mit den Methoden wie bei anderen Elementarteilchen (z.B. beim Zerfall des Pions, 11.1.3) hat bisher immer nur eine obere Grenze ergeben: $m_{\nu_e}c^2 < 2$ eV, $m_{\nu_\mu}c^2 < 190$ keV, $m_{\nu_\tau}c^2 < 18.2$ MeV [1]. Bis auf die Theoretiker, die sich mit den hypothetischen Neutrino-Oszillationen befassten, ging man daher allgemein von $m_{\nu_e} = m_{\nu_\mu} = m_{\nu_\tau} = 0$ aus. Verständlich daher das Aufsehen im Jahr 1998, als Neutrino-Oszillationen nachgewiesen werden konnten, womit klar war, dass es zwischen den Neutrinomassen Unterschiede gibt.

Der Nachweis gelang mit dem Kamiokande-Detektor anhand der hochenergetischen Neutrinos aus der Höhenstrahlung. Sie entstehen durch den Zerfall der Pionen und der dabei entstandenen Myonen:

$$\pi \rightarrow \mu + \nu_\mu \quad , \quad \mu \rightarrow e + \nu_e + \nu_\mu \quad (10.29)$$

Diese Schreibweise ist vereinfacht, ohne Rücksicht auf Unterscheidung nach Ladung und (Anti-)Teilchen, denn auch der Detektor macht da keinen Unterschied. Elektronische und myonische Neutrinos (einschl. Antineutrinos) entstehen also in einem bestimmten Zahlenverhältnis (1:2) und müssten mangels nennenswerter Wechselwirkung genau so am Detektor ankommen⁷². Ihre freie Weglänge in Materie ist bei diesen hohen Energien zwar nicht mehr in Lichtjahren zu bemessen wie bei den Neutrinos aus der Radioaktivität (vgl. Bethe-Abschätzung von 1935 Kap. 6.5.11), aber im Vergleich z.B. zum Erddurchmesser immer noch um viele Größenordnungen länger. Das genannte Zahlenverhältnis sollte daher auch nicht davon abhängen, wo die Neutrinos in der Atmosphäre entstanden sind, egal ob über Japan oder über seinen Antipoden. Genau diese Abhängigkeit zeigte sich aber schon in den Messungen der ersten, 400 Tage dauernden Datensammlung: Die winkelabhängigen Intensitäten von elektronischen und myonischen Neutrinos variieren stark unterschiedlich. Während von “oben” (d.h. praktisch: alle Richtungen oberhalb des Horizonts) zu 110 ν_e etwa richtig 256 ν_μ gekommen waren (nahe am vorausgesagten Verhältnis 1:2), waren es von “unten” (bei gleicher Anzahl ν_e) nur 139 ν_μ . Auf dem längeren Weg verschwindet fast die Hälfte der myonischen Neutrinos. Das war am 5.8.1998 der New York Times eine Meldung auf der Titelseite wert.

Eine Anmerkung zum Experiment: Wieder ist es die Methode der Relativ-Messung, die das Ergebnis so überzeugend macht. Absolute Werte für die Neutrinoflüsse aus verschiedenen Richtungen sind mit viel größeren Unsicherheiten behaftet als ihr Verhältnis, weil sich viele der schlecht bekannten apparativen Parameter (einschließlich der möglichen Fehler bei der Auswahl und Auswertung der Ereignisse) aus dem Quotienten wegheben.

Jetzt fehlt noch das verbindende Argument zwischen dem Fehlen von ein paar Neutrinos und der an Wichtigkeit kaum zu unterschätzenden Schlussfolgerung, das müsse an ihrer unterschiedlichen Masse liegen. Dies war von den Theoretikern, die über möglicherweise massebehaftete Neutrinos schon seit Jahren nachgedacht hatten, längst durchgerechnet. Man muss annehmen, dass die Neutrinos so, wie sie eindeutig

⁷¹Chiralität ist bei allen drei Wechselwirkungen erhalten.

⁷²Abgesehen von dem Anteil, der den noch nicht zerfallenen Myonen entspricht, durch deren Entdeckung die Geschichte der “überschüssigen” Leptonen begonnen hatte – s. Kap. 10.3.1.

(d.h. in orthogonalen Zuständen) als ν_e , ν_μ oder ν_τ entstanden sind, nicht ganz den Eigenzuständen des Hamilton-Operators für freie Neutrinos entsprechen. Sie haben dann auch genau genommen keine scharf definierte Masse, denn diese kommt nur den richtigen Eigenzuständen zu, die nun mit ν_1 , ν_2 , ν_3 bezeichnet werden. Unsere Teilchen sind also Linearkombinationen davon.⁷³ Zur Erklärung, wie daraus eine Oszillation entsteht, vereinfachen wir das auf die zwei Teilchen ν_μ und ν_τ und nur zwei Basiszustände ν_1 und ν_2 .⁷⁴

Dann haben wir wieder einmal ein quantenmechanisches 2-Zustandssystem vor uns, in dem sich mangels weiterer "mathematischer Freiheitsgrade" alles ganz genau so abspielen muss wie in jedem anderen 2-Zustandssystem, also z.B. wie für einen Spin $1/2$ im Magnetfeld. Die Energieeigenzustände ν_1 und ν_2 entsprechen Spin $\pm 1/2$ in Feldrichtung, und unsere ν_μ und ν_τ sind zwei andere orthogonale Zustände, also entsprechend mit ihren Spins $\pm 1/2$ ausgerichtet längs einer anderen Achse. Im wirklichen Fall des Spins im Magnetfeld setzt dann sofort die Larmorpräzession ein, d.h. die beiden Zustände präzedieren bei konstantem Winkel mit der Larmorfrequenz um die Magnetfeldrichtung, stets längs einer gemeinsamen schrägen Achse ausgerichtet, die nun genau so präzediert. Nehmen wir den extremen Fall der *maximalen Mischung*, in dem sie senkrecht zur Feldrichtung steht, dann haben ν_μ und ν_τ nach einer halben Periode genau ihre Orientierungen vertauscht, und nach einer ganzen Periode sind sie wieder am alten Platz.⁷⁵ Ein Teilchen mit Anfangszustand ν_μ verschwindet also zeitweilig im Zustand ν_τ und müsste bei genügendem Zuwarten wieder als ν_μ auftauchen. Da die mathematischen Umformungen dieselben sind, ist dies Verhalten 1:1 auf die Neutrinosorten zu übertragen, wenn denn die Voraussetzung gegeben ist, dass die eigentlich wohldefinierten Energien bzw. Massen zu anderen Teilchen gehören als denen, die bei den Zerfällen erzeugt werden, und: dass diese Massen *verschieden* sind (denn ohne Energieaufspaltung, d.h. Magnetfeld, auch keine Larmorpräzession). Die genaue Durchrechnung dieses Verhaltens (s. z.B. [8, Kap. 7.9]) ergibt, dass ein Neutrino mit Energie E während einer Periode die Flugstrecke

$$L_0 = 4\pi\hbar c \frac{E}{|m_1^2 c^4 - m_2^2 c^4|} \quad (10.30)$$

zurückgelegt. Den Beobachtungen ist diese Periodizität nicht anzusehen; die beobachteten Verluste an myonischen Neutrinos werden als Anfang der ersten Periode der Oszillation zum tauonischen Neutrino gedeutet. Unter Einschluss von drei Neutrinosorten ergibt sich z.Zt. (2006) ein Schätzwert für die größte der drei Differenzen der Massenquadrate der energetischen Eigenzustände der drei Neutrinos: [24]:

$$\Delta(m^2 c^4) = 2.5 \times 10^{-3} \text{ (eV)}^2$$

Die beobachteten ν_μ und ν_τ müssen stark gemischte Linearkombinationen daraus sein. Mehr als $0.1 \text{ eV}/c^2$ dürfen ihre Massen selber demnach nicht auseinanderliegen, doch sicher ist, dass sie verschieden sind! Noch gibt es aber keinen anderen Effekt, mit dem sich diese Tatsache belegen ließe. Im Rest des Buches wird daher wieder die auf jeden Fall sehr gute Näherung $m_\nu=0$ angenommen.

⁷³Der Gedanke, das Superpositionsprinzip der Quantenmechanik auf die kohärente Überlagerung verschiedener Teilchen auszuweiten, war in den 1950er Jahren entstanden und hatte zunächst weithin Unverständnis hervorgerufen. Diese Entwicklung wird in Kap. 12.3.2 und 12.3.3 anhand der damals entdeckten seltsamen Eigenschaften der neutralen K -Mesonen dargestellt.

⁷⁴Das ist auch physikalisch eine gute Näherung, wenn z.B. der dritte Eigenzustand eine weit entfernt liegende Masse hat.

⁷⁵Dies Phänomen heißt auch *Quanten-Beat*.

Literaturverzeichnis

- [1] AMSLER, C. et al.: *Data Particle Book*. Physics Letters B, 667(1), 2008.
- [2] ANDERSON, CARL D.: *The Positive Electron*. Phys. Rev., 43(6):491–494, Mar 1933.
- [3] ARNETT, WD, JN BAHCALL, RP KIRSHNER und SE WOOSLEY: *Supernova 1987A*. Annual Reviews in Astronomy and Astrophysics, 27(1):629–700, 1989.
- [4] BAHCALL, JOHN N. und JR. DAVIS, RAYMOND: *Solar Neutrinos: A Scientific Puzzle*. Science, 191(4224):264–267, 1976.
- [5] BARDON, MARCEL, PETER NORTON, JOHN PEOPLES, ALLAN M. SACHS und JULIET LEE-FRANZINI: *Measurement of the Momentum Spectrum of Positrons from Muon Decay*. Phys. Rev. Lett., 14(12):449–453, Mar 1965.
- [6] BARTEL, W., L. BECKER et al.: *Tau-lepton production and decay at Petra energies*. Physics Letters B, 161(1-3):188 – 196, 1985.
- [7] BEHREND, H. J., J. BÜRGER et al.: *A measurement of the Muon pair production in $e+e-$ annihilation*. Physics Letters B, 191(1-2):209 – 216, 1987.
- [8] BERGER, CHR.: *Elementarteilchenphysik*. Springer, 2002.
- [9] BOSE, V.: *Plancks Gesetz und Lichtquantenhypothese*. Zeitschrift für Physik A Hadrons and Nuclei, 26(1):178–181, 1924.
- [10] BROWN, H. N. und G. ET AL. BUNCE: *Precise Measurement of the Positive Muon Anomalous Magnetic Moment*. Phys. Rev. Lett., 86(11):2227–2231, Mar 2001.
- [11] CONVERSI, M., E. PANCINI und O. PICCIONI: *On the Disintegration of Negative Mesons*. Phys. Rev., 71(3):209–210, Feb 1947.
- [12] DANBY, G., J-M. GAILLARD, K. GOULIANOS, L. M. LEDERMAN, N. MISTRY, M. SCHWARTZ und J. STEINBERGER: *Observation of High-Energy Neutrino Reactions and the Existence of Two Kinds of Neutrinos*. Phys. Rev. Lett., 9(1):36–44, Jul 1962.
- [13] DAVIS, RAYMOND: *Attempt to Detect the Antineutrinos from a Nuclear Reactor by the $Cl^{37}(\nu, e^-)A^{37}$ Reaction*. Phys. Rev., 97(3):766–769, Feb 1955.
- [14] DAVIS, RAYMOND: *Nobel Lecture: A half-century with solar neutrinos*. Rev. Mod. Phys., 75(3):985–994, Aug 2003.
- [15] DIRAC, P.A.M.: *On the Theory of Quantum Mechanics*. Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character (1905-1934), 112(762):661–677, 1926.
- [16] DIRAC, PAUL A.C.: *Interview mit Thomas Kuhn, 1963, 1994*.
- [17] EINSTEIN, A.: *Quantentheorie des Einatomigen idealen Gases*. Akademie der Wissenschaften, in Kommission bei W. de Gruyter, 1924.
- [18] FERMI, E.: *Zur Quantelung des idealen einatomigen Gases*. Zeitschrift für Physik A Hadrons and Nuclei, 36(11):902–912, 1926.

- [19] FEYNMAN, R.P., R.B. LEIGHTON und M. SANDS: *The Feynman lectures on physics*. Addison Wesley, Reading MA, 1963.
- [20] GRIBOV, V. und B. PONTECORVO: *Neutrino astronomy and lepton charge*. Physics Letters B, 28(7):493 – 496, 1969.
- [21] GRIFFITHS, DAVID JEFFREY: *Einführung in die Elementarteilchenphysik*. Akad.-Verl., Berlin, 1996.
- [22] HEISENBERG, W.: *Mehrkörperproblem und Resonanz in der Quantenmechanik*. Zeitschrift für Physik A Hadrons and Nuclei, 38(6):411–426, 1926.
- [23] HEISENBERG, W.: *Mehrkörperprobleme und Resonanz in der Quantenmechanik. II*. Zeitschrift für Physik A Hadrons and Nuclei, 41(8):239–267, 1927.
- [24] HOSAKA, J. und K. ISHIHARA ET AL.: *Three flavor neutrino oscillation analysis of atmospheric neutrinos in Super-Kamiokande*. Physical Review D (Particles and Fields), 74(3):032002, 2006.
- [25] KONOPINSKI, E. J. und H. M. MAHMOUD: *The Universal Fermi Interaction*. Phys. Rev., 92(4):1045–1049, Nov 1953.
- [26] LEIGHTON, ROBERT B., CARL D. ANDERSON und AARON J. SERIFF: *The Energy Spectrum of the Decay Particles and the Mass and Spin of the Mesotron*. Phys. Rev., 75(9):1432–1437, May 1949.
- [27] LONGO, MICHAEL J.: *Tests of relativity from SN1987A*. Phys. Rev. D, 36(10):3276–3277, Nov 1987.
- [28] MANNHEIM, P.D.: *Introduction to Majorana masses*. International Journal of Theoretical Physics, 23(7):643–674, 1984.
- [29] MESSIAH, A.: *Quantum Mechanics*. Courier Dover Publications, 1999.
- [30] NERESON, NORRIS und BRUNO ROSSI: *Further Measurements on the Disintegration Curve of Mesotrons*. Phys. Rev., 64(7-8):199–201, Oct 1943.
- [31] ODOM, B., D. HANNEKE, B. D’URSO und G. GABRIELSE: *New Measurement of the Electron Magnetic Moment Using a One-Electron Quantum Cyclotron*. Physical Review Letters, 97(3):30801, 2006.
- [32] PAIS, ABRAHAM: *Inward bound*. Clarendon Press, Oxford, 1994.
- [33] PAULI, W.: *Über der Zusammenhang des Abschlusses der Elektronengruppen im Atom mit der Komplexstruktur des Spectrums*. Z. Phys, 31:765, 1925.
- [34] PERL, M.: *The Discovery of the Tau Lepton*, 1997.
- [35] PERL, M. L., G. S. ABRAMS et al.: *Evidence for Anomalous Lepton Production in $e + -e -$ Annihilation*. Phys. Rev. Lett., 35(22):1489–1492, Dec 1975.
- [36] RENTON, P.: *Electroweak interactions*. Cambridge University Press New York, 1990.
- [37] SCHMITZ, N.: *Neutrinoophysik*. BG Teubner Verlag, 1997.
- [38] SHANKAR, R.: *Principles of Quantum Mechanics*. Plenum Press, N.Y., 1980.
- [39] STREET, J. C. und E. C. STEVENSON: *New Evidence for the Existence of a Particle of Mass Intermediate Between the Proton and Electron*. Phys. Rev., 52(9):1003–1004, Nov 1937.
- [40] SUTTON, C. und H.P. HERBST: *Raumschiff Neutrino: die Geschichte eines Elementarteilchens*. Birkhäuser, 1994.
- [41] VAN DYCK, ROBERT S., PAUL B. SCHWINBERG und HANS G. DEHMELT: *Electron magnetic moment from geonium spectra: Early experiments and background concepts*. Phys. Rev. D, 34(3):722–736, Aug 1986.

- [42] VAN DYCK, ROBERT S., PAUL B. SCHWINBERG und HANS G. DEHMELT: *New high-precision comparison of electron and positron g factors*. Phys. Rev. Lett., 59(1):26–29, Jul 1987.

⁷⁶(Die Seitenzahlen sollen vorübergehend die Kapitelnummer erkennen lassen.)

Index

- aktuelles/Änderungen
 - 2009.05.27: *QED*-Wirkungsquerschnitt aus Dimensionsbetrachtung und Skalen-Invarianz, 10027
 - 2009.06.06: Myon keine Starke WW (1946), 10021
- 2-Zustands-System
 - Neutrino-Mischung, 10034
- 4-Vektor (Lorentz-Vektor)
 - Stromdichte j^μ , 10011
 - elektrodynamisches Potential A^μ , 10002
- Annihilation, 10027
- Anomalie
 - g -Faktor
 - Präzisionsmessung, 10012, 10024
- Antisymmetrie
 - bei Funktion $f(x)$, 10018
- Antiteilchen
 - CPT*-gespiegeltes Teilchen, 10014
 - Feynmans Deutung, 10014
 - in Dirac-Theorie, 10011
 - nicht Loch, sondern eigene Teilchensorte, 10012
- Atom
 - myonisches, 10021
- Auger-Effekt, 10030
- Austauschsymmetrie
 - Dirac-Theorie, 10016
 - bei Kopplung gleicher Drehimpulse, 10019
- β -Zerfall, inverser, 10029
- Balmer-Formel, 10001
- Bausteine der Materie
 - nur 3 verschiedene?, 10000
- Boltzmann-Statistik, 10016
- Bose-Einstein-Kondensation, 10017
- Bose-Einstein-Statistik
 - täuscht Anziehung vor, 10017
- Boson
 - Name, 10016
 - aus zwei Fermionen?, 10017
 - positive Vertauschungs-Symmetrie, 10018
 - und klassisches Feld, 10018
- Cherenkov-Strahlung
 - Neutrino-Nachweis, 10030, 10031
- Chiralität
 - Dirac-Theorie, 10014
 - Unterscheidung Neutrino/Antineutrino, 10033
- Collider-Beschleuniger
 - Produktion neuer Teilchen/Antiteilchen-Paare, 10027
- Compton-Effekt
 - Klein-Nishina-Formel, 10010, 10011
- Coulomb-Kraft
 - Skalen-Invarianz, 10028
- CPT*-Symmetrie
 - Teilchen/Antiteilchen, 10014
- Davis, Raymond
 - Sonnen-Neutrinos, 10030
- Denkverbote
 - Spiegelsymmetrie kann verletzt sein?, 10012
 - identische Teilchen unterscheidbar?, 10013
- Dimensions-Betrachtung
 - Coulomb-Kraft skaleninvariant, 10028
- Dirac, Paul A.C.
 - “Spielen mit Formeln”, 10000, 10003
 - hat Fermi-Statistik übersehen, 10016
- Dirac-Gleichung, 10002, 10003
 - Lorentz-Invarianz, 10008
 - Voraussage Antiteilchen, 10001
 - erklärt Besonderheiten der Fermionen, 10000
 - nicht spiegelinvariant?, 10008
- Dirac-Kopplung, 10007
 - elektromagnetisches Feld im Hamilton-Op., 10007
- Dirac-Matrizen, 10003
 - γ^5 , 10015
 - γ^μ , 10009
- Dirac-Raum, 10006
 - Ursprung der Antiteilchen, 10011
 - Ursprung der Chiralität, 10014
 - Ursprung des Spins, 10004, 10010
 - Ursprung des magnet. Moments, 10007
- Dirac-Spinor, 10000, 10006
 - Bedeutung der Komponenten, 10010
 - Lorentz-Transformation, 10009
 - Paritäts-Transformation, 10008
 - Übergangstrom vektoriell, 10011
- Diracsche Unterwelt

- konnte nicht überzeugen, 10012
- Drehimpuls-Erhaltung
 - Unterscheidung Neutrino/Antineutrino, 10033
- Edelgase, 10030
- elektromagnetischer Übergang
 - Vektorstrom aus Dirac-Spinoren, 10011
- Elektron (e , e^-)
 - Dirac-Theorie, 10002
 - anomaler g -Faktor $g \neq 1$, 10001, 10007
 - anomaler g -Faktor $g \neq 2$
 - Präzisionsmessung, 10012
 - anomaler Drehimpuls, 10001
 - klassischer Radius, 10029
 - kleiner als 10^{-18} m, 10029
- Elektron-Positron-Schauer
 - fingerprint* zur Unterscheidung von Myonen, 10025
 - im Kamiokande-Detektor, 10031
- Energien
 - negative?, 10006
- experimentum crucis*
 - Unterschied Myon/Elektron, 10025
- Fermi-Dirac-Statistik, 10016
 - Dirac-Theorie, 10016
 - täuscht Abstoßung vor, 10017
- Fermion
 - Name, 10016
 - Pauli-Prinzip, 10000
 - Spin halbzahlig, 10000
 - magnet. Moment größer als klassisch möglich, 10000
 - negative Vertauschungs-Symmetrie, 10019
 - nicht Quant von klassischem Feld, 10019
- Fortschritt der Wissenschaft
 - durch Spekulation im Überschuss-Formalismus, 10018
- ($g-2$)-Experiment
 - Elektron/Positron, 10013
 - Myon, 10024
- g -Faktor
 - Dirac-Theorie, 10007
 - Elektron/Positron
 - Anomalie, 10012
 - Präzisionsmessung, 10012
 - Myon
 - Anomalie, 10023
 - Präzisionsmessung, 10023
- Gibbs'sches Paradoxon und Ununterscheidbarkeit von Teilchen, 10016
- Goldene Regel
 - Phasenraum-Faktor
 - für alle relativistischen Teilchen gleich, 10028
- Höhenstrahlung
 - Myon entdeckt (1936), 10019
 - Positron entdeckt (1932), 10001
- Hamilton-Funktion
 - klassische für Ladung im elektromagnet. Potential, 10007
- Hamilton-Operator
 - Vertauschbarkeit und Erhaltungsgröße, 10004, 10010
- Helizität
 - Dirac-Theorie, 10010
 - Unterscheidung Neutrino/Antineutrino, 10033
 - nicht lorentzinvariant, 10015
 - und Chiralität, 10015
- Homestake
 - Neutrino-Nachweis, 10030
- identische Teilchen
 - Abstoßung/Anziehung durch Vertauschungssymmetrie?, 10017
 - Vertauschung, 10016
 - gemessene Übereinstimmung, 10013
 - im Alltag?, 10017
- Kamiokande
 - Neutrino-Detektor, 10030
 - Neutrino-Oszillation, 10033
- Kernsynthese, 10029
- kilomol, 10021
- Klassisches Feld
 - Feldstärke und Anzahl der Quanten nicht gleichzeitig wohldefiniert, 10018
 - Quant muss Boson sein, 10018
- Klein-Nishina-Formel
 - Dirac-Theorie, 10010
- Koinzidenzen
 - verzögerte (Messmethode für kurze Lebensdauer)
 - Myon, 10020
- kontinuierliches Spektrum
 - bei 3 Teilchen immer, 10022
 - bei Myon-Zerfall, 10022
- Laborsystem, 10027, 10028
- Ladung
 - erste neue Art, 10022
- Landau-Niveaus
 - im Magnetfeld, 10012
- Larmor-Präzession
 - von Myonen, 10024
- Lebensdauer
 - künstlich verlängert

- Myon, 10024
- Lepton
 - 3 Familien, 10026, 10029
 - Bildungsgesetz unbekannt, 10001
 - anomaler g -Faktor, 10007, 10012, 10023
- Leptonen-Ladung
 - Erhaltungssatz
 - beim Zerfall des Myons, 10025
 - elektronische/myonische, 10025
 - erste neue Art von Ladung, 10024
- linkshändig
 - chirale Unterscheidung, 10015
- Lorentz, Herman A.
 - Lorentz-Transformation, 10002
 - normaler Zeeman-Effekt, 10001
- Lorentz-Faktor γ
 - für Myonen der Höhenstrahlung, 10021
- Lorentz-Invarianz
 - Chiralität, 10014
 - Dirac-Gleichung, 10008
 - Helizität nicht, 10015
 - Masse, 10009
 - Skalarprodukt, 10004
 - des Wechselwirkungsoperators, 10011
- Lorentz-Kontraktion
 - Drehachse stellt sich parallel, 10010
 - für Myonen der Höhenstrahlung, 10021
- Lorentz-Vektor, *siehe* 4-Vektor
- Lorentzboost, 10009
- Magnetische Falle
 - Messungen an 1 Elektron, 10012
- Magnetisches Moment
 - Elektron
 - (g -2)-Messung, 10013
 - aus Dirac-Theorie, 10007
 - Myon
 - (g -2)-Messung, 10023
- Majorana-Teilchen, 10032
- Massenpunkt
 - Magnetismus klassisch nicht erklärbar, 10008
 - fundamentale Teilchen, 10001, 10029
- Messgenauigkeit
 - durch Relativmessung, 10012
- Moderne Physik (ab \sim 1900)
 - Wegbereiter (Ausw.)
 - Albert Einstein, 10016
- Myon
 - Kinematik des Zerfalls, 10022
 - Lebensdauer, 10020
 - und lange Flugstrecke, 10020
 - Produktion in Beschleunigern, 10023
 - Zerfallselektron hat max 50% der Energie, 10022
 - anomaler g -Faktor
 - Präzisionsmessung, 10023
 - erstes nachgewiesenes instabiles Elementarteilchen (1936), 10020
 - ist nicht angeregtes Elektron, 10022
 - magnetisches Moment
 - Präzisionsmessung, 10023
 - nicht Ursache der Kernkräfte, 10021
 - verursacht Null-Effekt in allen Detektoren, 10019
- myonisches Atom, 10021
- Natrium
 - gelbe Spektrallinie: durch Spin aufgespalten, 10001
- Neutrino, 10029
 - Flussdichte auf der Erde, 10031
 - Geschwindigkeit im Weltall, 10031
 - Majorana-Teilchen?, 10032
 - Masse Null?, 10033
 - Masse nicht Null, 10034
 - Mischung aus Massen-Eigenzuständen, 10034
 - Oszillation, 10026, 10033
 - bestätigt (1998), 10033
 - Schauer von der Supernova, 10031
 - direkter Nachweis, 10029
 - ν_μ , 10025
 - ν_τ , 10027
 - elektronisches/myonisches, 10025
 - fliegt Lichtjahre in Materie, 10033
 - verschieden von Antineutrino?, 10032
- Neutrino-Detektoren, 10029
- Neutrinoquellen
 - Sonne, Supernova, 10031
- Nobelpreis
 - verspätet für Neutrino, 10026
- Null-Effekt
 - durch Myonen, 10019
- Occams Rasiermesser, 10032
- Operator
 - Spin aus Dirac-Gleichung, 10004
- Paar-Erzeugung, 10027
- Pauli, Wolfgang
 - Neutrino-Hypothese, 10029
 - Spin-Matrizen, 10004
 - Spin-Statistik-Theorem, 10019
- Pauli-Matrizen, 10004
- Pauli-Prinzip, 10016
 - ist keine Abstoßung, 10017
 - ist keine Wechselwirkung, 10017

- Pauli-Spinor
 -genähert aus Dirac-Spinor, 10007
- Photon
 -Bose-Einstein-Statistik, 10016
 -virtuelles
 -bei $E=20$ GeV, aber $\vec{p}=0$, 10027
- Positron (e^+)
 -als Antiteilchen, 10014
 -als Loch in Diracs Unterwelt, 10011
 -anomaler g -Faktor $g \neq 2$
 -Präzisionsmessung, 10012
- pp -Zyklus
 -Neutrino-Emission, 10031
- Präzisionsmessungen, *siehe* Resonanzmethoden
- Projektionsoperator
 -chiraler, 10016
- Proton (p)
 -instabil?, 10030
- pseudoskalare Teilchen
 -in Dirac-Theorie, 10008
- Quanten-Beat, 10034
- Quanten-Elektrodynamik (QED)
 -Vorhersage (quantitativ)
 -Leptonen-Paar-Erzeugung, 10027
- Quark-Lepton-Symmetrie
 -durch τ -Lepton gestört, 10026
 -durch *charm*-Quark hergestellt, 10026
- Rabi, Isidor
 -"Wer hat das Myon bestellt?", 10021
- rechtshändig
 -chirale Unterscheidung, 10015
- Reichweite
 -der Wechselwirkung
 -max. Korrektur am Coulomb-Gesetz, 10029
- Reines, Frederick
 -Nobelpreis verspätet (1995), 10025
- Relativ-Messung
 -Myon nicht Yukawa-Teilchen, 10021
 -überzeugende Methode, 10012, 10024, 10033
- relativistische Invarianz, *siehe* Lorentz-Invarianz
- Relativitätsprinzip, 10002
- Relativitätstheorie
 -Energie-Impuls-Beziehung, 10002, 10003, 10018
 -Lorentz-Invarianz, 10002
 -Massenzunahme, 10009
- Resonanzmethode für Präzisionsmessung
 -Magnetisches Moment, 10012
- Rotation
 -und Definition des Drehimpulses, 10004
- Schalenmodell
 -führt auf Pauli-Prinzip, 10016
- Schrödinger-Gleichung (1925)
 -nicht relativistisch, 10000, 10002
- Schwache Wechselwirkung
 -nur mit chiralen Teilchen, 10015
science fiction, 10018
- Signifikanz, 10024
 -beim Nachweis des Tauons, 10026
- Skalarprodukt
 -Lorentz-invariantes, 10004
- Skalen-Invarianz
 -Coulomb-Kraft, 10028
- Skalen-Verhalten
 -Wirkungsquerschnitt $\propto E^{-2}$, 10028
- Sonnen-Neutrinos
 -Defizit, 10032
 -nachgewiesen, 10030
- Sonnenenergie
 -am Erlöschen?, 10032
- Spin
 -definiert durch Rotationsinvarianz der Dirac-Gleichung, 10004
 -klassische Erklärung unmöglich, 10007
- Spin $1/2$
 -Begründung in Dirac-Theorie, 10004
 -klassische Erklärung unmöglich, 10002
 -zentral in relativistischer Quantenmechanik, 10004
- Spin-Statistik-Theorem, 10000
 -Beweise, 10018
 -Dirac-Theorie, 10016
- Statistik
 -Boltzmann, 10016
 -Bose-Einstein, 10016
 -Fermi-Dirac, 10016
 -bei Teilchenvertauschung, 10000
 -Spin-Statistik-Theorem, 10018
 -klassisch, 10016
 -quantenmechanisch, 10018
- Strahlenbelastung
 -durch Kernwaffenversuche, 10025
- Strom-Strom-Kopplung, 10011
- Supernova
 -Neutrinos nachgewiesen (1987), 10031
- Symmetrie
 -Leitfaden bei neuer Theorie, 10004
 -Leptonen-Quarks
 -durch τ -Lepton gestört, 10026
 -durch *charm*-Quark hergestellt, 10026
 -bei Drehimpuls-Addition, 10019
 -bei Funktion $f(x)$, 10018
- τ , *siehe* Tauon
- Tauon

- Entdeckung (1975), 10026
- Teilchen, neues
 - vorhergesagt (richtig)
 - e^+ , 10012
 - Yukawa-Meson, 10020
- Teilchen/Antiteilchen-Paar
 - Annihilation, 10027
 - Erzeugung aus Energie, 10027
 - Symmetrie verletzt?, 10012
- Theorie
 - Leitfaden für Experimente, 10020
 - nicht Leitfaden f. Experimente, 10020
 - vorauslaufende Spekulation, 10033
- Thermodynamik
 - Gleichgewicht aus Statistik, 10017
- Übergang
 - elektromagnetischer
 - Vektorstrom aus Dirac-Spinoren, 10011
- Übergangs-Operator
 - Vektorstrom aus Dirac-Spinoren, 10011
- Übergangsstrom, 10011
- Überschuss-Formalismus, 10018
- Unschärfe-Relation
 - klass. Feldstärke / Anzahldichte der Feldquanten, 10018
- Vektorpotential
 - in der Dirac-Gleichung, 10007
- Vierer-Vektor, *siehe* 4-Vektor
- Wellengleichung, relativistische
 - Dirac, 10003
 - Klein-Gordon-Gl. ($m > 0$)., 10003
 - Maxwell-Gln. ($m=0$), 10002
- Yukawa, Hideki
 - Meson-Hypothese der Kernkraft, 10019
- Zeeman-Effekt
 - Modell f. 2-Zustands-System, 10034
 - anomaler, 10001
 - normaler, klassisch erklärt (Lorentz 1902), 10001
- Zeit-Dilatation
 - beobachtet bei Myonen, 10021, 10024
- Zeit-Richtung
 - negative f. Antiteilchen, 10014
- Zustand
 - Zerlegung, 10018
- Zyklotronfrequenz, 10012